MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU

TIBOR RODIGER

DERIVACIJE - RIJEŠENI ZADACI

DRUGO PROŠIRENO IZDANJE

Autor:

Tibor Rodiger, mag.edu.math.

Čakovec, kolovoz 2023.

Autor:

Tibor Rodiger, mag.edu.math.

Recenzenti:

doc.dr.sc. Damira Keček

Sanja Zlatić, v. pred.

Lektor:

Ivana Rodiger, prof.

Nakladnik:

Međimursko veleučilište u Čakovcu

Za nakladnika:

doc.dr.sc. Igor Klopotan, v. pred.

SADRŽAJ

1. Tablično deriviranje

Derivacija funkcije $f(x)$ u točki x je $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Tablica osnovnih derivacija:

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Pravila za deriviranje

Derivacija zbroja i razlike: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Derivacija umnoška: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Derivacija funkcije pomnožene s konstantom: $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

Derivacija kvocijenta: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Primjer 1.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = x^6$

Rješenje

Prema tablici derivacija $(x^n)' = nx^{n-1}$, za $n = 6$ imamo:

$f'(x) = 6\, x^{6-1} = 6\, x^5$

Primjer 2.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = 4\, x^7$

Rješenje

U ovom slučaju deriviramo umnožak te primijenjujemo formulu $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

$f'(x) = 4 \cdot (x^7)'$

$f'(x) = 4 \cdot 7\, x^6$

$f'(x) = 28\, x^6$

Primjer 3.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = 5\, x^4 - 7\, x^3 + 8\, x^2 - 6\, x + 9$

Rješenje

Primijenimo formulu za derivaciju zbroja i razlike $(u \pm v)' = u' \pm v'$ te Primjer 1 i Primjer 2

$f'(x) = 5 \cdot 4\, x^3 - 7 \cdot 3\, x^2 + 8 \cdot 2\, x - 6 \cdot 1 + 0$

$f'(x) = 20\, x^3 - 21\, x^2 + 16\, x - 6$

Primjer 4.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = 3 \sin x$

Rješenje

$f'(x) = 3 \cdot (\sin x)'$

$f'(x) = 3\cos x$

Primjer 5.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = -5\ \ln x$

Rješenje

$f'(x) = -5 \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{-5}{x}$

Primjer 6.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = 3\ e^x$

Rješenje

$f'(x) = 3\ (e^x)'$

$f'(x) = 3\ e^x$

Primjer 7.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = 5 \cdot 7^x$

Rješenje

$f'(x) = 5 \cdot 7^x \cdot \ln 7$

$f'(x) = 5 \ln 7\ \cdot 7^x$

Primjer 8.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{x} + 6\sqrt[5]{x} + \frac{12}{x^3}$

Rješenje

Da bi mogli derivirati ovu funkciju, prvo moramo sve zapisati u obliku potencija s racionalnim eksponentima

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 5\ x^{-1} + 6\ x^{\frac{1}{5}} + 12\ x^{-3}$

Sad deriviramo primjenjujući formulu $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} - 5\cdot(-1)\,x^{-2} + 6\cdot\frac{1}{5}\,x^{-\frac{4}{5}} + 12\cdot(-3)\,x^{-4}$$

Dobiveni rezultat zapisujemo u obliku korjena i razlomaka

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} + \frac{6}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{36}{x^4}$$

Primjer 9.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{7}{x^2} + 6\sqrt[3]{x} - \frac{8}{\sqrt[6]{x^5}} + 9\sqrt[5]{x^8}$

Rješenje

$$f(x) = 7\,x^{-2} + 6\,x^{\frac{1}{3}} - 8\,x^{-\frac{5}{6}} + 9\,x^{\frac{8}{5}}$$

$$f'(x) = 7\cdot(-2)\,x^{-3} + 6\cdot\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} - 8\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\,x^{-\frac{11}{6}} + 9\cdot\frac{8}{5}\,x^{\frac{3}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{-14}{x^3} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{20}{3\sqrt[6]{x^{11}}} + \frac{72\sqrt[5]{x^3}}{5}$$

Primjer 10.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = x\,e^x$

Rješenje

Primjenjujemo formulu za darivaciju umnoška $(u\,v)' = u'v + u\,v'$

$$f'(x) = (x)'e^x + x\,(e^x)'$$

$$f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x$$

$$f'(x) = e^x(1+x)$$

Primjer 11.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = (5\,x^2 - 8)(4x + 3\,x^2)$

Rješenje

$f'(x) = (5\,x^2 - 8)'(4x + 3\,x^2) + (5\,x^2 - 8)(4x + 3\,x^2)'$

$f'(x) = 10\,x\,(4x + 3\,x^2) + (5\,x^2 - 8)(4 + 6\,x\,)$

$f'(x) = 40\,x^2 + 30\,x^3 + 20\,x^2 + 30\,x^3 - 32 - 48\,x$

$f'(x) = 60\,x^3 + 60\,x^2 - 48\,x - 32$

Primjer 12.

Odredimo derivaciju funkcije $y = x^5 \ln x$

Rješenje

$f'(x) = (x^5)'\ \ln x + x^5\,(\ln x)'$

$f'(x) = 5\,x^4 \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = 5\,x^4 \ln x + x^4$

$f'(x) = \ x^4(1 + 5 \ln x)$

Primjer 13.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = 7\,x^3 \sin x$

Rješenje

$f'(x) = 7[(\,x^3)' \sin x +\ x^3\,(\sin x)']$

$f'(x) = 7[\,3x^2 \sin x + 7\,x^3 \cos x]$

$f'(x) = 7\,x^2\,(3 \sin x + x \cos x)$

Primjer 14.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = (8\,x^3 - 6\,x^2 - 4\,x + 3)\,e^x$

Rješenje

$f'(x) = (8\,x^3 - 6\,x^2 - 4\,x + 3)'e^x + (8\,x^3 - 6\,x^2 - 4\,x + 3)\,(e^x)'$

$f'(x) = (24\,x^2 - 12\,x - 4)\,e^x + (8\,x^3 - 6\,x^2 - 4\,x + 3)\,e^x$

$$f'(x) = (24\,x^2 - 12\,x - 4 + 8\,x^3 - 6\,x^2 - 4\,x + 3)\,e^x$$

$$f'(x) = (8\,x^3 + 18\,x^2 - 16\,x - 1)\,e^x$$

Primjer 15.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{5x-2}{4x}$

Rješenje

Deriviramo po formuli za derivaciju količnika $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(5x-2)' \cdot 4x - (5x-2) \cdot (4x)'}{(4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5\ \cdot\ 4x - (5\,x-2) \cdot 4}{16\,x^2}$$

$$f'(x) = \frac{20\,x - 20\,x + 8}{16\,x^2}$$

$$f'(x) = \frac{8}{16\,x^2} = \frac{1}{2\,x^2}$$

Primjer 16.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{2-7\,x}{6\,x-5}$

Rješenje

$$f'(x) = \frac{(2-7\,x)'(6\,x-5) - (2-7\,x)(6\,x-5)'}{(2-7\,x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-7\,(6\,x-5) - (2-7\,x)6}{(2-7\,x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-42\,x + 35 - 12 + 42\,x}{(2-7\,x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{23}{(2-7\,x)^2}$$

Primjer 17.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{3\,x^2 - 5\,x + 4}{7x - 4\,x^2}$

Rješenje

$$f'(x) = \frac{(3\,x^2 - 5\,x + 4)'(7x - 4\,x^2) - (3\,x^2 - 5\,x + 4)\,(7x - 4\,x^2)'}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(6\,x - 5)(7x - 4\,x^2) - (3\,x^2 - 5\,x + 4)\,(7 - 8\,x)}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{42\,x^2 - 24\,x^3 - 35\,x + 20\,x^2 - (21\,x^2 - 24\,x^3 - 35\,x + 40\,x^2 + 28 - 32\,x)}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{42\,x^2 - 24\,x^3 - 35\,x + 20\,x^2 - 21\,x^2 + 24\,x^3 + 35\,x - 40\,x^2 - 28 + 32\,x}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 32\,x - 28}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

Primjer 18.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

Rješenja

$$f'(x) = \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x - (2\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\,(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Primjer 19.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{e^x}{x^2+5\,x-7}$

Rješenje

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(x^2+5\,x-7) - e^x\,(x^2+5\,x-7)'}{(x^2+5\,x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+5\,x-7) - e^x(2\,x+5)}{(x^2+5\,x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+5\,x-7-2\,x-5)}{(x^2+5\,x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+3\,x-12)}{(x^2+5\,x-7)^2}$$

Primjer 20.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{e^x-7}{4-3e^x}$

Rješenje

$$f'(x) = \frac{(e^x-7)'(4-3e^x) - (e^x-7)(4-3e^x)'}{(4-3e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(4-3e^x) - (e^x-7)(-3e^x)}{(4-3e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(4-3e^x-(-3(e^x-7))}{(4-3e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(4-3e^x+3e^x-21)}{(4-3e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-17e^x}{(4-3e^x)^2}$$

Zadatak 1. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) $f(x) = x^2 - 3x$

b) $f(x) = 6x^5 - 11x^4 + 3x^3 - 6x - 17$

c) $f(x) = 5x^{\frac{4}{3}} - 18x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{11}{4}} + 2x^{\frac{1}{5}}$

d) $f(x) = \sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + \frac{8}{x} - \frac{4}{x^4}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 12\sqrt[3]{x^4} + 7\sqrt{x^7} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^4}}$

f) $f(x) = 11e^x$

g) $f(x) = 6 \cdot 7^x$

h) $f(x) = 10 \ln x$

i) $f(x) = \log_4 x$

Zadatak 2. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) $f(x) = (x^2 - 6x)(5x + 3)$

b) $f(x) = (x^4 + 3x^3 - 6)(3x^3 - 7)$

c) $f(x) = (3x^4 - 5x^2 - 5x)(2x^2 - 6x + 1)$

d) $f(x) = (4x - 5)e^x$

e) $f(x) = (3x^2 - 6x + 5)\ln x$

f) $f(x) = 3e^x(2x^4 - \frac{1}{x})$

g) $f(x) = 6^x(6x - 3)$

h) $f(x) = (6x + 4)\sin x$

i) $f(x) = (3x^3 - x - 7)\tan x$

Zadatak 3. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) $f(x)=\dfrac{3x+5}{5x-1}$

b) $f(x)=\dfrac{6x}{8-x}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{3x^2-4}{5x-7x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{7x^2-6x-5}{-2x^2+5x-7}$

f) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x+3}$

g) $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\cot x-1}$

Zadatak 4. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) $f(x)=\dfrac{e^x+3}{2-e^x}$

b) $f(x)=\dfrac{6e^x}{7-e^x}$

c) $f(x)=\dfrac{3e^x+4}{2-5e^x}$

d) $f(x)=\dfrac{\ln x+4}{3+x}$

e) $f(x)=\dfrac{1-3\ln x}{2-3\ln x}$

f) $f(x)=\dfrac{2e^x-5}{\ln x+2}$

2. Deriviranje složene funkcije

Primjer 1.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = (3x - 8)^7$

Rješenje

Primjenjujemo formulu za derivaciju složene funkcije $u(v)' = u'(v) \cdot v'$

Primijetimo da je $v = 3x - 8$, $u = v^7$ što znači da je $u' = 7v^6 \cdot v'$

Slijedi $f'(x) = 7(3x - 8)^6 \cdot (3x - 8)'$

$f'(x) = 7(3x - 8)^6 \cdot 3 = 21(3x - 8)^6$

Primjer 2.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = (6x^3 - 7x^2 - 8)^{11}$

Rješenje

Primijetimo da je $v = 6x^3 - 7x^2 - 8, u = v^{11}$

$f'(x) = 11(6x^3 - 7x^2 - 8)^{10} \cdot (6x^3 - 7x^2 - 8)'$

$f'(x) = 11(6x^3 - 7x^2 - 8)^{10} \cdot (18x^2 - 14x) = 11(18x^2 - 14x)(6x^3 - 7x^2 - 8)^{10}$

$f'(x) = 22(9x^2 - 7x)$

Primjer 3.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$

Rješenje

Prvo korijen zapišemo u obliku potencije s racionalnim eksponentom a onda deriviramo.

$f(x) = (3x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2-5)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot (3x^2-5)^{-\frac{1}{2}} = 6x(3x^2-5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{6x}{\sqrt{3x^2-5}}$$

Primjer 4.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt[5]{7x^4-6x^3+2x-7}$

Rješenje

$$f(x) = (7x^4-6x^3+2x-7)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(7x^4-6x^3+2x-7)^{-\frac{4}{5}} \cdot (7x^4-6x^3+2x-7)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(7x^4-6x^3+2x-7)^{-\frac{4}{5}} \cdot (28x^3-18x^2+2)$$

$$f'(x) = \frac{28x^3-18x^2+2}{5\sqrt[5]{(7x^4-6x^3+2x-7)^4}}$$

Primjer 5.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{12}{\sqrt[4]{(2x^3-5x+3)^3}}$

Rješenje

$$f(x) = 12(2x^3-5x+3)^{-\frac{3}{4}}$$

$$f'(x) = 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (2x^3-5x+3)^{-\frac{7}{4}} \cdot (2x^3-5x+3)'$$

$$f'(x) = -9 \cdot (2x^3-5x+3)^{-\frac{7}{4}} \cdot (6x^2-5)$$

$$f'(x) = \frac{-9(6x^2-5)}{\sqrt[4]{(2x^3-5x+3)^7}}$$

$$f'(x) = \frac{-9(6x^2-5)}{(2x^3-5x+3)\sqrt[4]{(2x^3-5x+3)^3}}$$

Primjer 6.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{4x-7}{5-x}}$

Rješenje

$$f(x) = \left(\frac{4x-7}{5-x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4x-7}{5-x}\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(\frac{4x-7}{5-x}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4x-7}{5-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(4x-7)' \cdot (5-x) - (4x-7) \cdot (5-x)'}{(5-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4x-7}{5-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{4 \cdot (5-x) - (4x-7) \cdot (-1)}{(5-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{4x-7}} \cdot \frac{20-4x+4x-7}{(5-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{4x-7}} \cdot \frac{13}{(5-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{13}{2(5-x)^2}\sqrt{\frac{5-x}{4x-7}}$$

Primjer 7.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \ln(3x^2+8x-4)$

Rješenje

Primijetimo da je $v = 3x^2+8x-4$, $u = \ln v$ i slijedi $u' = \frac{1}{v} \cdot v'$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2+8x-4} \cdot (3x^2+8x-4)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 8x - 4} \cdot (6x + 8) = \frac{6x + 8}{3x^2 + 8x - 4}$$

Primjer 8.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \ln \frac{3x-4}{2-5x}$

Rješenje

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{3x - 4}{2 - 5x}} \cdot (\frac{3x - 4}{2 - 5x})'$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3x - 4} \cdot \frac{3(2 - 5x) - (3x - 4)(-5)}{(2 - 5x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3x - 4} \cdot \frac{6 - 15x - (-15x + 20)}{(2 - 5x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3x - 4} \cdot \frac{6 - 15x + 15x - 20}{(2 - 5x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3x - 4} \cdot \frac{-14}{(2 - 5x)^2} = \frac{-14}{(3x - 4)(2 - 5x)}$$

Primjer 9.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \ln^2 x$

Rješenje

Funciju možemo zapisati i $f(x) = (\ln x)^2$. Primijetimo da je $v = \ln x$ i $u = v^2$

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot (\ln x)'$$

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

Primjer 10.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \ln \sin x$

Rješenje

Primjetimo da je $v = \sin x$ i $u = \ln v$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\ x$$

Primjer 11.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \sin x^2$

Primjetimo da je $v = x^2$ i $u = \sin v$.

$$f'(x) = \cos x^2 \cdot (x^2)'$$

$$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

Primjer 12.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \sin^2 x$

Rješenje

Funkciju možemo zapisati i $f(x) = (\sin x)^2$

Primjetimo da je $v = \sin x$ i $u = v^2$

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

Primjer 13.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = e^{4x-7}$

Rješenje

Primjetimo da je $v = 4x - 7$ i $u = e^v$

$$f'(x) = e^{4x-7} \cdot (4x - 7)'$$

$$f'(x) = e^{4x-7} \cdot 4 = 4e^{4x-7}$$

Primjer 14.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = e^{4x^3+2x+9}$

Rješenje

$$f'(x) = e^{4x^3+2x+9} \cdot (4x^3 + 2x + 9)'$$

$$f'(x) = e^{4x^3+2x+9} \cdot (12x^2 + 2) = (12x^2 + 2)e^{4x^3+2x+9}$$

$$f'(x) = 2(6x^2 + 1)e^{4x^3+2x+9}$$

Primjer 15.

Odredimo $f'(x), f''(x)\ i\ f'''(x)$za $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 11x^2 - x + 15$

Rješenje

$$f'(x) = 16x^3 - 21x^2 + 22x - 1$$

$$f''(x) = 48x^2 - 42x + 22$$

$$f'''(x) = 96x - 42$$

Primjer 16.

Odredimo $f'(x), f''(x)\ i\ f'''$ za $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^4} - 2\sqrt[5]{x^{14}}$

Rješenje

$$f(x) = 4x^{-1} - x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-4} - 2x^{\frac{14}{5}}$$

$$f'(x) = -4x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 12x^{-5} - \frac{28}{5}x^{\frac{9}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{12}{x^5} - \frac{28}{5}\sqrt[5]{x^9}$$

$$f''(x) = 8x^{-3} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 60x^{-6} - \frac{252}{25}x^{\frac{4}{5}}$$

$$f''(x) = \frac{8}{x^3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} + \frac{60}{x^6} - \frac{252}{25}\sqrt[5]{x^4}$$

$$f'''(x) = -24x^{-4} - \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} - 360x^{-7} - \frac{1008}{125}x^{-\frac{1}{5}}$$

$$f'''(x) = \frac{-24}{x^4} - \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}} - \frac{360}{x^7} - \frac{1008}{125\sqrt[5]{x}}$$

Primjer 17.

Odredimo $f'(x), f''(x)\ i\ f'''(x)$ za$f(x) = \frac{3x-7}{2x+9}$

Rješenje

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+9) - (3x-7) \cdot 2}{(2x+9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x + 27 - 6x + 14}{(2x+9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{41}{(2x+9)^2} = 41(2x+9)^{-2}$$

$f''(x)$ lakše se izračuna ukoliko y' deriviramo kao složenu funkciju

$$f''(x) = -82(2x+9)^{-3} \cdot (2x+9)'$$

$$f''(x) = -82(2x+9)^{-3} \cdot 2 = -164(2x+9)^{-3}$$

$$f''(x) = \frac{-164}{(2x+9)^3}$$

$$f'''(x) = 492(2x+9)^{-4} \cdot (2x+9)'$$

$$f'''(x) = 492(2x+9)^{-4} \cdot 2 = 984(2x+9)^{-4}$$

$$f'''(x) = \frac{984}{(2x+9)^4}$$

Primjer 18.

Odredimo $f'(x)\ i\ f''(x)$ za $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+3x^2}$

Rješenje

$$f'(x) = \frac{4x(x+3x^2) - (2x^2-1)(1+6x)}{(x+3x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 12x^3 - (2x^2 + 12x^3 - 1 - 6x)}{(x+3x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 12x^3 - 2x^2 - 12x^3 + 1 + 6x}{(x+3x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 1}{(x+3x^2)^2}$$

$f''(x)$ ćemo lakše iztračunati ako raspišemo nazivnik

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 6x^3 + 9x^4}$$

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x^2+6x^3+9x^4) - (2x^2+6x+1)(2x+18x^2+36x^3)}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

$$f''(x) =$$

$$\frac{4x^3+24x^4+36x^5+6x^2+36x^3+54x^4-(4x^3+36x^4+72x^5+12x^2+108x^3+216x^4+2x+18x^2+36x^3)}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x^3+24x^4+36x^5+6x^2+36x^3+54x^4-4x^3-36x^4-72x^5-12x^2-108x^3-216x^4-2x-18x^2-36x^3}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-72x^5 - 174x^4 - 108x^3 - 24x^2 - 2x}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

Primjer 19.

Odredimo$f'(x), f''(x)\ i\ f'''(x)$ za $f(x) = e^{x^2}$

Rješenje

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)'$$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x\, e^{x^2}$$

$f'(x)$ deriviramo po formuli za derivaciju umnoška

$f''(x) = (2x)'e^{x^2} + 2x\left(e^{x^2}\right)'$

$f''(x) = 2\,e^{x^2} + 2x\left(e^{x^2} \cdot 2x\right)$

$f''(x) = 2\,e^{x^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2} = 2\,e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$

$f''(x) = 2\,e^{x^2}(1 + 2x^2)$

$f'''(x) = \left(2\,e^{x^2}\right)'(1 + 2x^2) + 2\,e^{x^2}(1 + 2x^2)'$

$f'''(x) = \left(2e^{x^2} \cdot 2x\right)(1 + 2x^2) + 2e^{x^2}(4x)$

$f'''(x) = 4xe^{x^2}(1 + 2x^2) + 8xe^{x^2} = 4xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2} + 8xe^{x^2} = 8x^3e^{x^2} + 12xe^{x^2}$

$f'''(x) = 4xe^{x^2}(2 + 3x^2)$

Primjer 20.

Odredimo $f'(x) i\, f''(x)$ za $f(x) = e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

Rješenje

$f'(x) = e^{5x^3-7x^2+4x-2} \cdot (5x^3 - 7x^2 + 4x - 2)'$

$f'(x) = e^{5x^3-7x^2+4x-2} \cdot (15x^2 - 14x + 4)$

$f'(x) = (15x^2 - 14x + 4)e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

$f''(x) = (15x^2 - 14x + 4)'e^{5x^3-7x^2+4x-2} + (15x^2 - 14x + 4)\left(e^{5x^3-7x^2+4x-2}\right)'$

$f''(x) = (30x - 14)e^{5x^3-7x^2+4x-2} + (15x^2 - 14x + 4)\left[e^{5x^3-7x^2+4x-2} \cdot (15x^2 - 14x + 4)\right]$

$$f''(x) = (30x - 14)e^{5x^3-7x^2+4x-2} \\ + (15x^2 - 14x + 4)(15x^2 - 14x + 4)e^{5x^3-7x^2+4x-2}$$

$f''(x) = [(30x - 14) + (15x^2 - 14x + 4)(15x^2 - 14x + 4)]e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

$$f''(x) = [30x - 14 + 225x^4 - 210x^3 + 60x^2 - 210x^3 + 196x^2 - 56x + 60x^2 - 56x + 16]e^{5x^3-7x^2+4x-2}$$

$$f''(x) = (225x^4 - 420x^3 + 512x^2 - 82x + 2)\, e^{5x^3-7x^2+4x-2}$$

Zadatak 1. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) $f(x) = (x^2 + 8x)^6$

b) $f(x) = (x^3 - 3x - 9)^{11}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2 - 7)^5}$

d) $f(x) = \sqrt{3x+4}$

e) $f(x) = \sqrt[5]{4x^2 - 3x + 8}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{(18x^6 - 2)^5}$

g) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[6]{(4x^2 - 3x - 1)^{13}}}$

h) $f(x) = (7x^2 - 5)^7 (2x+5)^6$

i) $f(x) = (3x^2 - 4x + 11)\sqrt[5]{4x+9}$

Zadatak 2. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) $f(x) = e^{3x-7}$

b) $f(x) = e^{2x^2-5x-8}$

c) $f(x) = e^{\frac{3x-2}{7-2x}}$

d) $f(x) = 4^{5x+1}$

e) $f(x) = \ln(x+5)$

f) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 5)$

g) $f(x) = \ln\dfrac{2x+5}{3x-1}$

h) $f(x) = \ln\sqrt{4x^3 - 7x^2 + 5}$

i) $f(x)=\log_3 \dfrac{3x^2-4x}{5x^2+3}$

Zadatak 3. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) $f(x)=\sin x^5$

b) $f(x)=\sin^5 x$

c) $f(x)=\cos(2x-5)$

d) $f(x)=\cos(8x^3-7x-1)$

e) $f(x)=\ln\cos x$

f) $f(x)=\dfrac{\cos(2x-1)}{\sin x}$

3. Tangenta i normala

Primjer 1.

Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ u točki $x_0 = 2$

Rješenje

Primjenjujemo formulu za jednadžbu tangente na $f(x)$ u x_0 : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Najprije izračunamo y_0, $f'(x)$ i $f'(x_0)$

$y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 3 = -5$

$f'(x) = 4x - 5$

$f'(x_0) = f'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$

Uvrstimo dobiveno u formulu

$y - (-5) = 3(x - 2)$

$y = 3x - 11$

Primjer 2.

Odredimo jednadžbu tangente i normale na graf funkcije$f(x) = \frac{5x-6}{4x+3}$ u točki $x_0 = 3$

Rješenje

Prvo moramo izračunati y_0, $f'(x)$ i $f'(x_0)$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{5 \cdot 3 - 6}{4 \cdot 3 + 3} = \frac{3}{5}$$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (4x + 3) - (5x - 6) \cdot 4}{(4x + 3)^2} = \frac{39}{(4x + 3)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{39}{(4 \cdot 3 + 3)^2} = \frac{13}{75}$$

Uvrstimo u formulu za trangentu

$$y-\frac{3}{5}=\frac{13}{75}(x-3)$$

$$y-\frac{3}{5}=\frac{13}{75}x-\frac{13}{25}$$

$$y=\frac{13}{75}x+\frac{2}{25}$$

Uvrstimo u formulu za normalu

$$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

$$y-\frac{3}{5}=\frac{-75}{13}(x-3)$$

$$y=\frac{-75}{13}x+\frac{1264}{65}$$

Primjer 3.

Odredimo jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{6x-5}{3x+4}}$ u točki $x_0=-4$

Rješenje

Prvo moramo izračunati y_0, $f'(x)$ i $f'(x_0)$

$$y_0=f(-4)$$

$$=\sqrt{\frac{6\cdot(-4)-5}{3\cdot(-4)+4}}$$

$$=\sqrt{\frac{29}{8}}=\frac{\sqrt{58}}{4}$$

$$f'(x)=\sqrt{\frac{6x-5}{3x+4}}=\left(\frac{6x-5}{3x+4}\right)^{0.5}$$

$$f'(x)=0.5\left(\frac{6x-5}{3x+4}\right)^{-0.5}\cdot\left(\frac{6x-5}{3x+4}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+4}{6x-5}}\cdot\frac{(6x-5)'\cdot(3x+4)-(6x-5)\cdot(3x+4)'}{(3x+4)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+4}{6x-5}}\cdot\frac{6\cdot(3x+4)-(6x-5)\cdot 3}{(3x+4)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+4}{6x-5}}\cdot\frac{18x+24-18x+15}{(3x+4)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x+4}{6x-5}}\cdot\frac{39}{(3x+4)^2}$$

$$=\frac{39}{2}\sqrt{\frac{3x+4}{6x-5}}\cdot\frac{1}{(3x+4)^2}$$

$$f'(x_0)=\frac{39}{2}\sqrt{\frac{3\cdot(-4)+4}{6\cdot(-4)-5}}\cdot\frac{1}{(3\cdot(-4)+4)^2}$$

$$=\frac{39}{2}\sqrt{\frac{8}{29}}\cdot\frac{1}{8^2}$$

$$=\frac{39\sqrt{58}}{1856}$$

Uvrstimo u formulu za tangentu

$$y-\frac{\sqrt{58}}{4}=\frac{39\sqrt{58}}{1856}(x+4)$$

$$y=\frac{39\sqrt{58}}{1856}x+\frac{39\sqrt{58}}{464}+\frac{\sqrt{58}}{4}$$

$$y=\frac{39\sqrt{58}}{1856}x+\frac{155\sqrt{58}}{464}$$

Uvrstimo u formulu za normalu

$$y-\frac{\sqrt{58}}{4}=-\frac{1856}{39\sqrt{58}}(x+4)$$

$$y-\frac{\sqrt{58}}{4}=-\frac{32\sqrt{58}}{39}(x+4)$$

$$y=-\frac{32\sqrt{58}}{39}x-\frac{128\sqrt{58}}{39}+\frac{\sqrt{58}}{4}$$

$$y=-\frac{32\sqrt{58}}{39}x-\frac{128\sqrt{58}}{39}+\frac{\sqrt{58}}{4}$$

Primjer 4.

Odredimo jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x)=\ln\frac{11-3x}{7x-12}$ u točki $x_0=3$

Rješenje

Prvo moramo izračunati y_0, $f'(x)$ i $f'(x_0)$

$$y_0=f(3)$$

$$=\ln\frac{11-3\cdot3}{7\cdot3-12}$$

$$=\ln\frac{2}{9}$$

$$f'(x)=\left(\frac{11-3x}{7x-12}\right)^{-1}\cdot\frac{(11-3x)'\cdot(7x-12)-(11-3x)\cdot(7x-12)'}{(7x-12)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x-12}{11-3x}\cdot\frac{-3\cdot(7x-12)-(11-3x)\cdot7}{(7x-12)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x-12}{11-3x}\cdot\frac{-21x+36-77+21x}{(7x-12)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x-12}{11-3x}\cdot\frac{-41}{(7x-12)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-41}{(11-3x)(7x-12)}$$

$$f'(x_0)=\frac{-41}{(11-3\cdot 3)(7\cdot 3-12)}$$

$$=\frac{-41}{18}$$

Uvrstimo u formulu za tangentu

$$y-\ln\frac{2}{9}=-\frac{41}{18}(x-3)$$

$$y=-\frac{41}{18}x+\frac{41}{6}+\ln\frac{2}{9}$$

Uvrstimo u formulu za normalu

$$y-\ln\frac{2}{9}=\frac{18}{41}(x-3)$$

$$y-=\frac{18}{41}x-\frac{54}{41}+\ln\frac{2}{9}$$

Primjer 5.

Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=x^2-6x+7$ paralelnu s pravcem $y=x+2$.

Rješenje

Budući da paralelni pravci imaju jednake koeficijente smjera, tražimo točku ili točke na $f(x)=x^2-6x+7$ u kojima je $f'(x)=1$.

$$f'(x)=2x-6$$

$$f'(x)=1$$

$$2x-6=1$$

$x = \frac{7}{2}$

Odredimo još y_0

$y_0 = f\left(\frac{7}{2}\right)$

$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + 7$

$= -\frac{7}{4}$

Uvrstimo u formulu za tangentu

$y + \frac{7}{4} = 1(x - \frac{7}{2})$

$y = x - \frac{7}{2} - \frac{7}{4}$

$y = x - \frac{21}{4}$

Primjer 6.

Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{6x-3}{2x+5}$ paralelnu s pravcem $y = 4x - 5$.

Rješenje

Budući da paralelni pravci imaju jednake koeficijente smjera, tražimo točku ili točke na $f(x) = \frac{6x-3}{2x+5}$ u kojima je $f'(x) = 4$.

$f'(x) = \frac{(6x-3)' \cdot (2x+5) - (6x-3) \cdot (2x+5)'}{(2x+5)^2}$

$= \frac{6 \cdot (2x+5) - (6x-7) \cdot 2}{(2x+5)^2}$

$$= \frac{12x + 30 - 12x + 6}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{36}{(2x+5)^2}$$

Iz $f'(x) = 4$ imamo

$$\frac{36}{(2x+5)^2} = 4$$

$$(2x+5)^2 = \frac{36}{4} = 9$$

$$2x_1 + 5 = 3$$

$$2x_1 = -2$$

$$x_1 = -1$$

$$2x_2 + 5 = -3$$

$$x_2 = -4$$

Obzirom da imamo 2 rješenja, imamo i dvije tangente na $f(x) = \frac{6x-3}{2x+5}$ paralelne s pravcem $y = 4x - 5$.

Za svaku točku odredimo y_0 i izračunamo tangentu.

Za $x_0 = -1$:

$$y_0 = f(-1)$$

$$= \frac{6 \cdot (-1) - 3}{2 \cdot (-1) + 5}$$

$$= -3$$

Uvrstimo u formulu za trangentu

$y+3=4(x+1)$

$y=4x+4-3$

$y=4x+1$

Za $x_0=-4$:

$y_0=f(-4)$

$=\dfrac{6\cdot(-4)-3}{2\cdot(-4)+5}$

$=9$

Uvrstimo u formulu za tangentu

$y-9=4(x+4)$

$y=4x+16-9$

$y=4x+7$

Zadatak 1. Odredite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije u zadanoj točki:

a) $f(x)=x^2-5x-1,\ x_0=2$

b) $f(x)=(x^3-2x^2-2)^4,\ x_0=2$

c) $f(x)=\dfrac{3x-1}{4x+2},\ x_0=-3$

d) $f(x)=\sqrt{6x-7},\ x_0=\dfrac{3}{2}$

e) $f(x)=\sqrt[3]{4x^2-3},\ x_0=\dfrac{1}{2}$

f) $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{4x-5},\ x_0=2$

g) $f(x)=e^{4x^2}-7x+3,\ x_0=4$

h) $f(x)=\dfrac{e^{5x+3}-x}{e^x},\ x_0=0$

i) $f(x) = \sin(2x - \frac{7\pi}{4})$, $x_0 = \frac{3\pi}{8}$

Zadatak 2. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije paralelne sa zadanim pravcem:

a) $f(x) = x^2 - 9x - 11$, $y = 2x - 3$

b) $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$, $y = 3x - 1$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$, $y = -x$

d) $f(x) = \ln\frac{2x+7}{3x+1}$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$

4. Pad i rast funkcije. Ekstremi.

Kažemo da funkcija *f* **strogo raste** na intervalu $\langle a,b\rangle$

ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Kažemo da funkcija *f* **raste** na intervalu $\langle a,b\rangle$

ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Kažemo da funkcija *f* **strogo pada** na intervalu $\langle a,b\rangle$

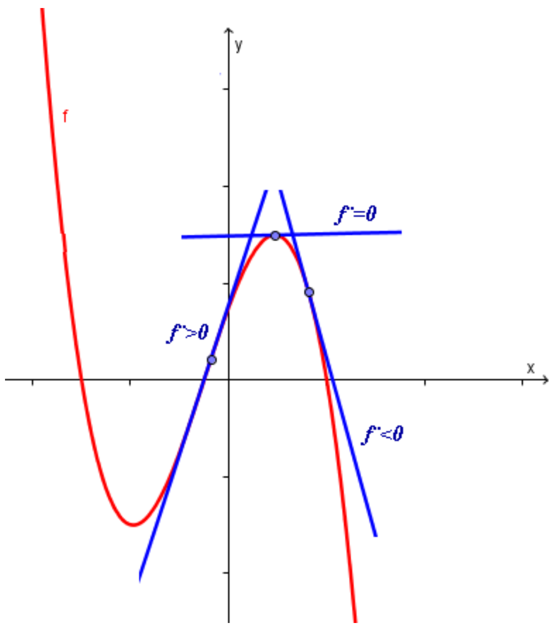
ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Kažemo da funkcija *f* **pada** na intervalu $\langle a,b\rangle$

ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Padajuće ili rastuće funkcije zovemo jednim imenom monotone funkcije, a intervale rasta/pada funkcije **intervalima monotonosti**.

Kako prva derivacija funkcije *f* u točki $T(x_0, f(x_0))$ daje informaciju o koeficijentu smjera tangente u toj točki pomoću derivacije možemo odrediti i intervala rasta ili pada funkcije.



Ako je $f'(x) > 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b \rangle$ tada funkcija raste na $\langle a,b \rangle$. Ako je $f'(x) < 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b \rangle$ tada funkcija pada na $\langle a,b \rangle$.

Primjer 1. Odredimo intervale rasta/pada funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3$.

Rješenje:

Domena ove funkcije je cijeli skup realnih brojeva (**R**).

Odredimo prvu derivaciju funkcije *f*: $f'(x) = -6x^2 - 2x$

Odredimo predznak prve derivacije funkcije. Predznak derivacije mijenja se u njenoj nultočki.

$$f'(x) = -6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}$$

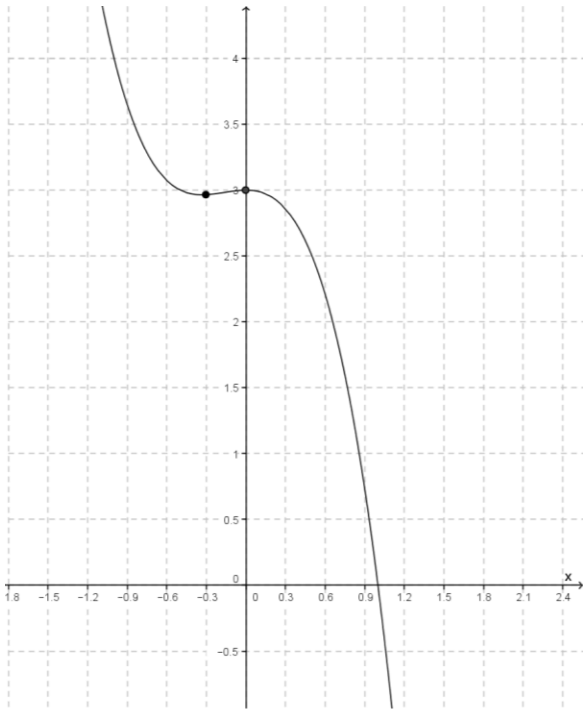
Nultočke derivacije unesemo u tablicu.

	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
predznak $f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	↘	↗	↘	

Na intervalu $\langle -\frac{1}{3}, 0 \rangle$ funkcija raste.

Funkcija pada na intervalu $\langle -\infty, -\frac{1}{3} \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$.

Pogledajmo graf te funkcije kako bi provjerili našu tvrdnju:



Kako je $f'(0) = f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ tangente u točkama $(0, y_1)$ i $\left(-\frac{1}{3}, y_2\right)$ paralelne su s x osi.

Takve točke nazivamo **stacionarne točke**.

Stacionarna točka funkcije je svaka točka x_0 za koju vrijedi: $f'(x_0) = 0$.

Zadatak 1. Odredite intervale monotonosti sljedećih funkcija.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$

b) $f(x) = -x^3 - x + 2$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

d) $f(x) = x^4 + 4x - 5$

e) $f(x) = \frac{2}{x}$

f) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

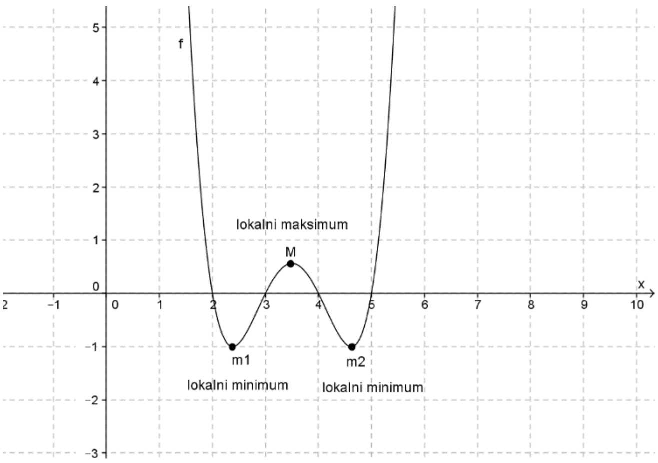
h) $f(x) = x + \ln x$

i) $f(x) = \ln \sqrt{x+2}$

Funkcija f ima **lokalni minimum** u točki x_0 ako postoji interval $\langle a,b\rangle$ ($x_0 \in \langle a,b\rangle$) takav da vrijedi $f(x_0) < f(x)$ za svaki $x \in \langle a,b\rangle, x \neq x_0$.

Funkcija f ima **lokalni maksimum** u točki x_0 ako postoji interval $\langle a,b\rangle$ ($x_0 \in \langle a,b\rangle$) takav da vrijedi $f(x_0) > f(x)$ za svaki $x \in \langle a,b\rangle, x \neq x_0$.

Ako funkcija ima lokalni maksimum ili lokalni minimum u točki x_0 kažemo da ima **lokalni ekstrem** u x_0.



Poučak:

Neka funkcija $f:\langle a,b\rangle \to R$ ima lokalni ekstrem u točki $x_0 \in \langle a,b\rangle$.

Ako postoji $f'(x_0)$ tada je $f'(x_0) = 0$.

Kandidati za lokalni ekstrem: stacionarne točke i točke gdje ne postoji derivacija funkcije.

Ako funkcija *f* ima stacionarnu točku u x_0 i u x_0 prva derivacija funkcije mijenja svoj predznak tada u x_0 funkcija *f* ima lokalni ekstrem.

Postupak određivanja intervala monotonosti i lokalnih ekstrema funkcije *f*:

1. Odrediti domenu funkcije *f*.
2. Odrediti $f'(x)$.
3. Riješiti jednadžbu $f'(x) = 0$ tj. odrediti stacionarne točke.

4. Napraviti tablicu s intervalima monotonosti i odrediti predznake $f'(x)$ (intervale određuje domena i stacionarne točke).
5. Odrediti točke lokalnog minimuma/maksimuma.

Primjer 2. Odredimo intervale monotonosti i ekstreme funkcije $f(x) = x \cdot \ln x$

Rješenje:

1. Domena funkcije:

   Zbog logaritamske funkcije $\ln x$ mora biti $x > 0 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbf{R}^+$

2. Odredimo prvu derivaciju funkcije f:

$$f'(x) = \left(x \cdot \ln x\right)'$$
$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= \ln x + 1$$

3. Stacionarne točke: riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.3679$$

4. - 5. Tablica – određivanje predznaka prve derivacije, ekstrema:

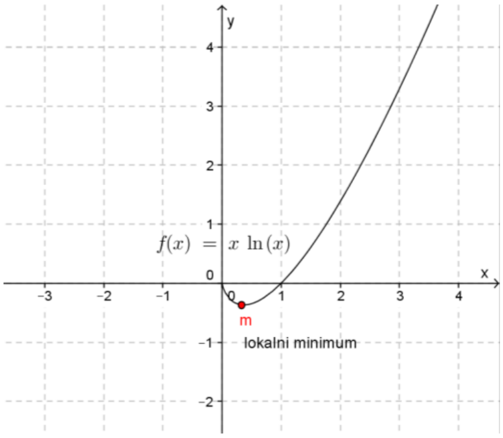
	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	↘	↗	

Funkcija u $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ postiže lokalni maksimum.

Funkcija je na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{e} \right\rangle$ padajuća.

Funkcija je na intervalu $\left\langle \frac{1}{e}, \infty \right\rangle$ rastuća.

Provjerimo ono što smo dobili računom na grafu funkcije:



Napomena:

Karakter ekstrema funkcije (minimum/maksimum) možemo odrediti i na osnovu **druge derivacije** funkcije *f*:

1. Odredimo derivacije funkcije $f'(x), f''(x)$.
2. Riješimo jednadžbu $f'(x)=0$ tj. odredimo stacionarne točke
3. Ako je $f''(x_0)>0$ onda je u x_0 **minimum** funkcije.

   Ako je $f''(x_0)<0$ onda je u x_0 **maksimum** funkcije.

   Ako je $f''(x_0)=0$ onda karakter ekstrema određujemo pomoću prve derivacije.

Primjer 3. Odredimo intervale monotonosti i ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

Rješenje:

1. Domena funkcije:

   $D_f=\mathbf{R}$

2. Odredimo prvu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x) = \left(\frac{3x}{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{3x' \cdot \left(x^2+1\right) - 3x \cdot \left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot \left(x^2+1\right) - 3x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^2+3-6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2}$$

3. Stacionarne točke: riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$

$$\frac{-3x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2} = 0$$

$$-3x^2+3 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 1$$

4. - 5. Tablica – određivanje predznaka prve derivacije, ekstrema:

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Funkcija u $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ postiže lokalni minimum.

Funkcija u $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ postiže lokalni maksimum.

Funkcija pada na intervalu $\left\langle -\infty, -1 \right\rangle \cup \left\langle 1, \infty \right\rangle$.

Funkcija raste na intervalu $\left\langle -1, 1 \right\rangle$.

Primjer 4. Odredimo intervale monotonosti i ekstreme funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-5}$

Rješenje:

1. Domena funkcije:

Zbog nazivnika mora biti

$x-5 \neq 0$

$x \neq 5$

Slijedi da je $Df = \boldsymbol{R} \backslash \{5\}$

2. Odredimo prvu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-16}{x-5}\right)'$$

$$=\frac{\left(x^2-16\right)'\cdot\left(x-5\right)-\left(x^2-16\right)\cdot\left(x-5\right)'}{\left(x-5\right)^2}$$

$$=\frac{2x\cdot\left(x-5\right)-\left(x^2-16\right)\cdot 1}{\left(x-5\right)^2}$$

$$=\frac{2x^2-10x-x^2+16}{\left(x-5\right)^2}$$

$$=\frac{x^2-10x+16}{\left(x-5\right)^2}$$

3. Stacionarne točke: riješimo jednadžbu $f'(x)=0$

$$\frac{x^2-10x+16}{\left(x-5\right)^2}=0$$

$x^2-10x+16=0$

$x_1=2$

$x_2=8$

4. - 5. Tablica – određivanje predznaka prve derivacije, ekstrema:

$-\infty$		2	5	8	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	

Funkcija u $\left(2,4\right)$ postiže lokalni maksimum.

Funkcija u 5 nije definirana.

Funkcija u $\left(8,16\right)$ postiže lokalni minimum.

Funkcija je na intervalu $\left\langle -\infty,2\right\rangle$ rastuća.

Funkcija je na intervalu $\left\langle 2,5\right\rangle$ padajuća.

Funkcija je na intervalu $\left\langle 5,8\right\rangle$ padajuća.

Funkcija je na intervalu $\langle 8,\infty\rangle$ rastuća.

Primjer 5. Odredimo intervale monotonosti i ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

Rješenje:

1. Domena funkcije:

   Zbog nazivnika mora biti

   $e^x \neq 0$

   Slijedi da je $Df = \boldsymbol{R}$

2. Odredimo prvu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x}\right)'$$
$$=\frac{x'\cdot\left(e^x\right)-x\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}$$
$$=\frac{e^x-x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}$$
$$=\frac{e^x\left(1-x\right)}{\left(e^x\right)^2}$$
$$=\frac{\left(1-x\right)}{e^x}$$

3. Stacionarne točke: riješimo jednadžbu $f'(x)=0$

$$\frac{1-x}{e^x}=0$$
$$1-x=0$$
$$x=1$$

4. - 5. Tablica – određivanje predznaka prve derivacije, ekstrema:

$-\infty$		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	↗	↘	

Funkcija u $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$ postiže lokalni maksimum.

Funkcija je na intervalu $\langle -\infty,1\rangle$ rastuća.

Funkcija je na intervalu $\langle 1,\infty \rangle$ padajuća.

Zadatak 2. Odredite intervale monotonosti i ekstreme slijedećih funkcija.

a) $f(x) = x^2 - 3x - 7$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

d) $f(x) = 2x^4 + 8x - 3$

e) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$

f) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

g) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

h) $f(x) = \frac{2x}{9 + x^2}$

i) $f(x) = \frac{1 - x}{x^2}$

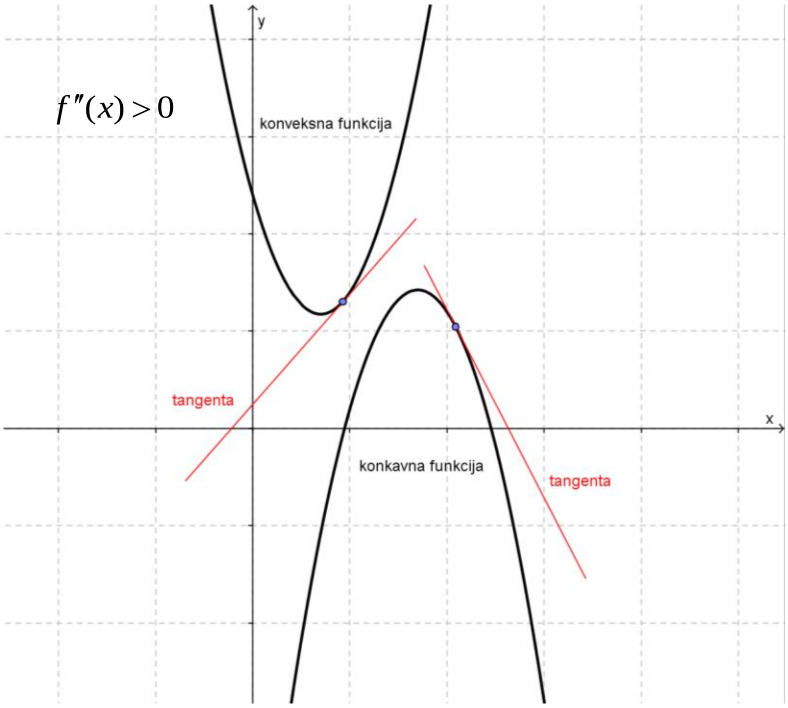
j) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

k) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

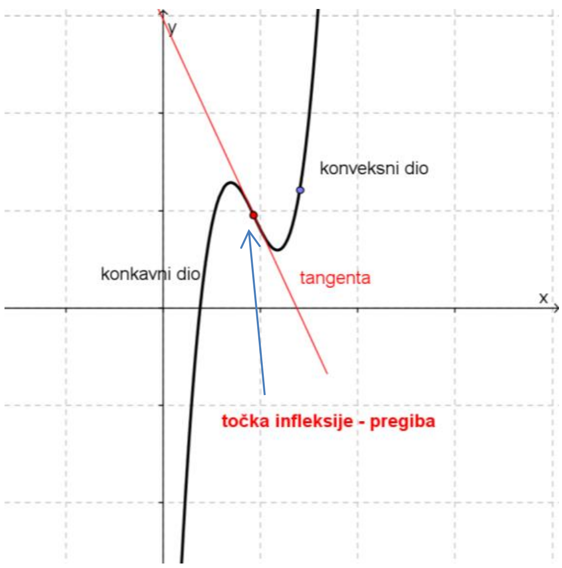
l) $f(x) = \ln \sqrt{x + 3}$

m) $f(x) = \sin x + \cos x + x$

5. Konveksnost i konkavnost funkcije



$f''(x) < 0$



Za funkciju kažemo da je **konveksna** na nekom intervalu $\langle a,b \rangle$ ako je graf funkcije iznad tangente na graf funkcije u bilo kojoj točki iz tog intervala.

Za funkciju kažemo da je **konkavna** na nekom intervalu $\langle a,b \rangle$ ako je graf funkcije ispod tangente na graf funkcije u bilo kojoj točki iz tog intervala.

Kako je nagib tangente vezan uz prvu derivaciju funkcije f u točki x_0, konveksnost i konkavnost funkcije možemo odrediti na osnovu njene druge derivacije.

> Ako je $f''(x) > 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b \rangle$ tada je funkcija konveksna na $\langle a,b \rangle$.
>
> Ako je $f''(x) < 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b \rangle$ tada je funkcija konkavna na $\langle a,b \rangle$.

Točku x_0 u kojoj konveksnost prelazi u konkavnost i obrnuto zovemo **točkom pregiba ili infleksije**. Za nju vrijedi da je $f''(x_0) = 0$.

Postupak određivanja intervala konveksnosti i konkavnosti funkcije *f*:

1. Odrediti domenu funkcije *f*.
2. Odrediti $f''(x)$.
3. Riješiti jednadžbu $f''(x) = 0$ tj. odrediti točke pregiba ili infleksije.
4. Napraviti tablicu s intervalima konveksnosti/konkavnosti i odrediti predznake $f''(x)$ (intervale određuje domena i točke pregiba).

Primjer 1. Odredimo intervale konkavnosti/konveksnosti funkcije $f(x) = x^2 + 4x - 1$.

Rješenje:

1. Domena funkcije je cijeli skup realnih brojeva. (D_f=**R**)
2. Odredimo drugu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x) = \left(x^2 + 4x - 1\right)' = 2x + 4$$
$$f''(x) = \left(2x + 4\right)' = 2$$

3. $f''(x) > 0$ za svaki x iz domene funkcije $\Rightarrow$ funkcija je konveksna na cijelom području definicije.

Primjer 2. Odredimo intervale konkavnosti/konveksnosti funkcije $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

1. Domena funkcije:

   Zbog nazivnika mora biti $x-1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

2. Odredimo drugu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

3. $f''(x) \neq 0$ za svaki x iz domene funkcije, ali mijenja predznak zbog prekida u domeni funkcije. Nema točke infleksije.

4. Napravimo tablicu:

	$-\infty$	1	$+\infty$
predznak $f''(x)$	-	+	
$f(x)$	konkavna $\cap$	konveksna $\cup$	

u 1 funkcija nije definirana

Na intervalu $\langle -\infty, 1\rangle$ funkcija je konkavna, a na $\langle 1, +\infty\rangle$ konveksna.

Primjer 3. Odredimo intervale konkavnosti/konveksnosti funkcije $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$.

1. Domena funkcije:

   Zbog nazivnika mora biti $x^2+1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R}$

2. Odredimo drugu derivaciju funkcije *f*:

   Iz Primjera 3. u prethodnom poglavlju imamo:

$$f'(x) = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

Nadalje

$$f''(x)=\frac{\left(-3x^2+3\right)'\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(-3x^2+3\right)\cdot\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}$$

$$=\frac{-6x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(-3x^2+3\right)\cdot\left(2\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)'\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{-6x\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(-3x^2+3\right)\cdot\left(2\left(x^2+1\right)\cdot 2x\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{-6x\left(x^2+1\right)^2-4x\left(-3x^2+3\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{-2x\left(x^2+1\right)\left(3\left(x^2+1\right)+2\left(-3x^2+3\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$=\frac{-2x\left(3x^2+3-6x^2+6\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$=\frac{-2x\left(-3x^2+9\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$=\frac{6x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

3. Točke infleksije: riješimo jednadžbu $f''(x)=0$

$$\frac{6x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0$$

$$6x\left(x^2-3\right)=0$$

$$6x=0$$

. $x_1=0$

$$x^2-3=0$$

$$x_2=-\sqrt{3}$$

$$x_3=\sqrt{3}$$

4. Napravimo tablicu:

$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	∞

$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Zadatak 1. Odredite intervale konkavnosti/konveksnosti sljedećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 - 5x$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 12$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

d) $f(x) = 2x^4 + x - 3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

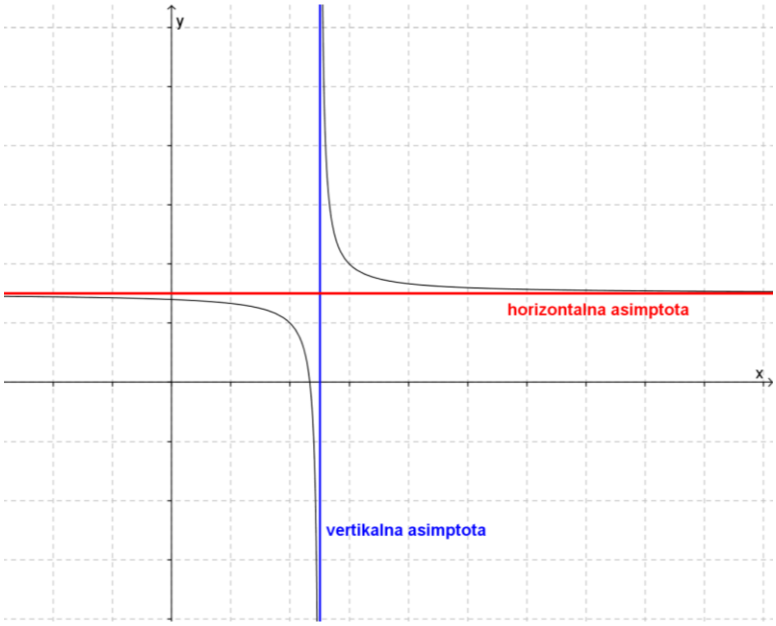
f) $f(x) = \dfrac{x}{9 + x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2}$

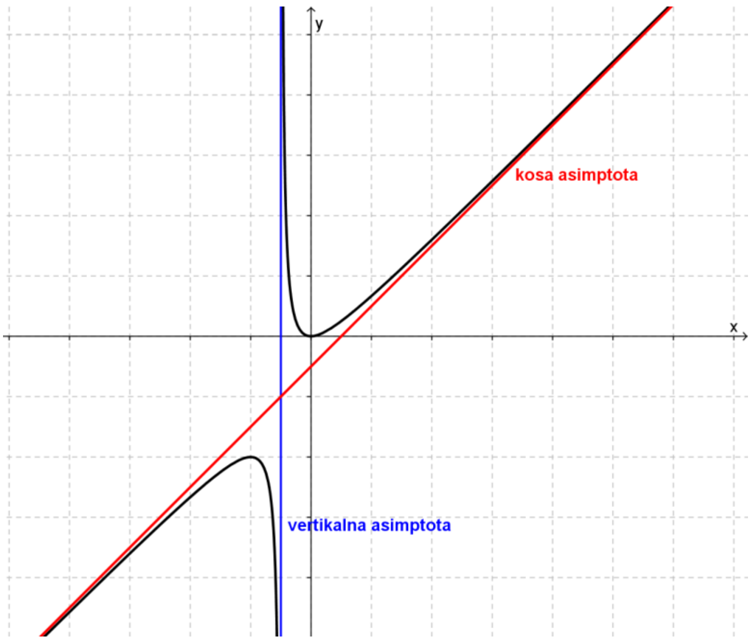
h) $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$

6. Asimptote funkcija

$f(x)$



$f(x)$



Jednostavnim riječnikom možemo reći da je asimptota pravac kojem se graf funkcije približava a nikad ga ne dodiruje.

Razlikujemo vertikalne, horizontalne i kose asimptote.

1. **Vertikalne asimptote**

Ako za funkciju f vrijedi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ onda je pravac $x = c$ njezina **vertikalna asimptota**.

2. **Horizontalne asimptote**

Ako za funkciju f vrijedi $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = l$ onda je pravac $y = l$ njezina (desna/lijeva) **horizontalna asimptota**.

3. **Kose asimptote**

Ako za funkciju f postoji

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ \text{ i } \ \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - k\cdot x\right) = l$$

onda je pravac $y = kx + l$ njezina **kosa asimptota**.

Primjer 1. Odredimo asimptote funkcije $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$.

Rješenje:

Odredimo prvo domenu funkcije:

Zbog nazivnika mora biti $x - 1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

Vertikalna asimptota: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2}{x-1} = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ je vertikalna asimptota funkcije.

Horizontalna asimptota: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = \infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalne asimptote.

Kose asimptote:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x-1}-2\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

$\Rightarrow y=2x+2$ je kosa asimptota.

Zadatak 1. Odredite asimptote (ako postoje) sljedećih funkcija.

a) $f(x)=x^2-5x$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2}$

e) $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

7. Ispitivanje tijeka funkcije. Graf funkcije

Postupak ispitivanja tijeka i crtanja grafa funkcije:

1. Odrediti domenu funkcije *f*.
2. Odrediti nultočke funkcije (sjecišta grafa funkcije s osi apscisa) i sjecište funkcije s osi ordinata.
3. Uočiti svojstva funkcije (parnost/neparnost, periodičnost).
4. Odrediti asimptote funkcije (vertikalne, horizontalne/kose).
5. Odrediti intervale monotonosti i ekstreme funkcije.
    a. Odrediti $f'(x)$.
    b. Riješiti jednadžbu $f'(x)=0$ tj. odrediti stacionarne točke.
    c. Napraviti tablicu s intervalima monotonosti i odrediti predznake $f'(x)$ (intervale određuje domena i stacionarne točke).
    d. Odrediti točke lokalnog minimuma/maksimuma.
6. Odrediti intervale konveksnosti/konkavnosti frunkcije.
    a. Odrediti $f''(x)$.
    b. Riješiti jednadžbu $f''(x)=0$ tj. odrediti točke pregiba ili infleksije.
    c. Napraviti tablicu s intervalima konveksnosti/konkavnosti i odrediti predznake $f''(x)$ (intervale određuje domena i točke pregiba).
7. Nacrtati graf funkcije.

Primjer 1. Ispitajmo tijek i nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$.

Rješenje:

1. Domena funkcije:

Zbog nazivnika mora biti $x^2-4\neq 0 \Rightarrow D_f=\mathbf{R}\setminus\{\pm 2\}$

2. Nultočke funkcije:

   Rješavamo jednadžbu $f(x)=0$. Jednadžba $\dfrac{2}{x^2-4}=0$ nema rješenja, pa nultočke ne postoje.

   Sjecište s osi ordinata: Određujemo $f(0)$.

   $f(0)=\dfrac{2}{0^2-4}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ graf funkcije siječe os ordinata u $-\dfrac{1}{2}$.

3. $f(-x)=f(x) \Rightarrow$ funkcija je parna (graf joj je simetričan s obzirom na os ordinata)

4. Asimptote funkcije:

   Vertikalna asimptota: $\lim\limits_{x\to\pm 2} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm 2}\dfrac{2}{x^2-4}=\pm\infty \Rightarrow$ pravci $x=-2, x=2$ su veretikalne asimptote funkcije.

   Horizontalna asimptota: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x^2-4}=0 \Rightarrow$ pravac $y=0$ je horizontalna asimptota.

   Ako funkcija ima horizontalne asimptote nema kose.

5. Intervali monotonosti i ekstremi:

   - Odredimo prvu derivaciju funkcije *f*: $f'(x)=\left(\dfrac{2}{x^2-4}\right)'=\dfrac{-4x}{\left(x^2-4\right)^2}$
   - Odredimo stacionarne točke.

     $$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Leftrightarrow x_1=0$$

   - Nacrtamo tablicu i odredimo predznak prve derivacije.

$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad +\infty$

predznak $f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	↗	↗	↘	↘

funkcija u -2 nije definirana

lokalni maksimum $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

funkcija u 2 nije definirana

Na intervalima $\langle -\infty,-2\rangle, \langle -2,0\rangle$ funkcija raste.

Na intervalima $\langle 0,2\rangle, \langle 2,+\infty\rangle$ funkcija pada.

6. Intervali konveksnosti/konkavnosti:

- Odredimo drugu derivaciju funkcije *f*: $f''(x)=\left(\frac{-4x}{\left(x^2-4\right)^2}\right)'=\frac{12x^2+16}{\left(x^2-4\right)^3}$
- Odredimo točke infleksije.

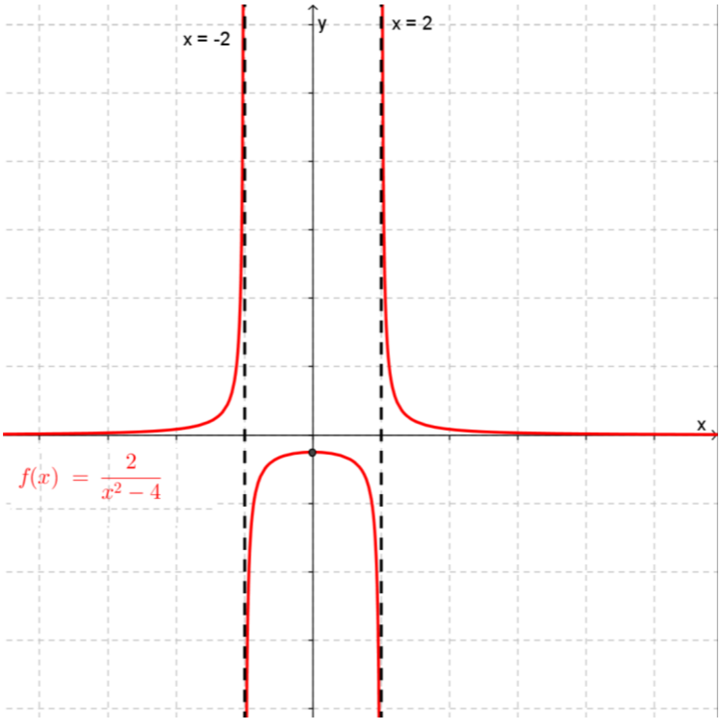
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{12x^2+16}{\left(x^2-4\right)^3}=0 \text{ nema realnih nultočaka} \Rightarrow \text{nema točaka infleksije.}$$

- Nacrtamo tablicu s točkama prekida domene i odredimo predznak druge derivacije.

$-\infty \qquad -2 \qquad 2 \qquad +\infty$

predznak $f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	konkavna	konveksna	konkavna

7. Crtamo graf funkcije.



Zadatak 1. Ispitajte tijek i nacrtajte graf sljedećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 - 3x$

b) $f(x) = 4x^2 + 22x$

c) $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 2$

e) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 11x + 3$

Zadatak 2. Ispitajte tijek i nacrtajte graf sljedećih funkcija:

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{4+3x}$

c) $f(x) = \frac{3-5x}{4x+5}$

d) $f(x) = \frac{6x}{7x-1}$

e) $f(x)=\frac{5-4x}{4x-5}$

Zadatak 3. Ispitajte tijek i nacrtajte graf sljedećih funkcija:

a) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$

c) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

d) $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$

e) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$

Zadatak 4. Ispitajte tijek i nacrtajte graf sljedećih funkcija:

a) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2+9}$

b) $f(x)=\frac{x^2+9}{x^2-9}$

c) $f(x)=\frac{x+9}{x^2-9}$

d) $f(x)=\frac{x^2+9}{x-9}$

e) $f(x)=\frac{x-9}{x^2+9}$

f) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+9}$

Zadatak 5. Ispitajte tijek i nacrtajte graf sljedećih funkcija:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-8x-15}$

c) $f(x)=\sqrt{-x^2+13x-30}$

d) $f(x)=\sqrt{-x^2-x-13}$

e) $f(x)=\sqrt{6x^2-3x+10}$

f) $f(x)=\sqrt{\frac{2x-5}{x+3}}$

g) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+7}{x^2+6}}$

h) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-16}}$

Zadatak 6. Ispitajte tijek i nacrtajte graf slijedećih funkcija:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x-8}$

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x-8}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-12}{4+2x}}$

d) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2+25}{5x}}$

Zadatak 7. Ispitajte tijek i nacrtajte graf slijedećih funkcija:

a) $f(x)=e^x\left(2x+3\right)$

b) $f(x)=e^x\left(x^2+x-3\right)$

c) $f(x)=\frac{e^x}{x+4}$

d) $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$

e) $f(x)=e^{3x-5}$

f) $f(x)=e^{x^2-9}$

Zadatak 8. Ispitajte tijek i nacrtajte graf slijedećih funkcija:

a) $f(x)=5x\ln x$

b) $f(x)=\ln(x+5)$

c) $f(x)=\log_5(2x-8)$

d) $f(x)=\ln(2x^2-11x+9)$

e) $f(x)=\ln\dfrac{2x-5}{3x-12}$

f) $f(x)=\ln\dfrac{12-4x}{6x+12}$

g) $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$

h) $f(x)=\ln\dfrac{1-4x^2}{1-16x^2}$

Zadatak 9. Ispitajte tijek i nacrtajte graf slijedećih funkcija:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-7}{e^x}$

b) $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{3x+4}$

c) $f(x)=\dfrac{\log_2(8-x)}{x^2+4x-5}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{e^{2x}+1}$

Zadatak 10. Ispitajte tijek i nacrtajte graf slijedećih funkcija:

a) $f(x)=\sin(2x)$

b) $f(x)=\cos(4x-3)$

c) $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}$

d) $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{\sin x}$

e) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x-1}$

f) $f(x)=3\tan(4x)$

g) $f(x)=\dfrac{3}{\tan x+1}$

8. Literatura

P. Javor: Uvod u matematičku analizu, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

B. P. Deminovič i suradnici: Zadaci i riješeni primjeri iz Matematičke analize, Golden marketing –Tehnička knjiga, Zagreb, 2003

D.Jukić, R.Scitovski: Matematika I, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 1998

L. Krnić, Z. Šikić: Račun diferencijalni i integralni, I dio, Školska knjiga, Zagreb, 1992