MEĐIMURSKO VELEUČILIŠTE U ČAKOVCU

TIBOR RODIGER

DERIVACIJE - RIJEŠENI ZADACI

Čakovec, srpanj 2015.

Autor:

Tibor Rodiger, prof.

Recenzenti:

Darko Obadić, prof.
Tamara Srnec, prof.

Nakladnik:

Međimursko veleučilište u Čakovcu

Za nakladnika:

doc.dr.sc. Nevenka Breslauer, prof.v.š.

ISBN 978-953-8095-00-9

SADRŽAJ

1. Tablično deriviranje

Derivacija funkcije $f(x)$ u točki x je $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Tablica osnovnih derivacija:

$(c)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Pravila za deriviranje

Derivacija zbroja i razlike: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Derivacija umnoška: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Derivacija funkcije pomnožene s konstantom: $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

Derivacija kvocijenta: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Primjer 1.

Deriviraj $y = x^6$

Rješenje

Vidimo po tablici derivacija $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, s time da je $n = 6$.

$y' = 6\,x^{6-1} = 6\,x^5$

Primjer 2.

Deriviraj $y = 4\,x^7$

Rješenje

U ovom slučaju deriviramo umnožak te primijenjujemo formulu $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

$y' = 4 \cdot (x^7)'$

$y' = 4 \cdot 7\,x^6$

$y' = 28\,x^6$

Primjer 3.

Deriviraj $y = 5\,x^4 - 7\,x^3 + 8\,x^2 - 6\,x + 9$

Rješenje

Primjenimo formulu za derivaciju zbroja i razlike $(u \pm v)' = u' \pm v'$ te Primjer 1 i Primjer 2

$y' = 5 \cdot 4\,x^3 - 7 \cdot 3\,x^2 + 8 \cdot 2\,x - 6 \cdot 1 + 0$

$y' = 20\,x^3 - 21\,x^2 + 16\,x - 6$

Primjer 4.

Deriviraj $y = 3\sin x$

Rješenje

$y' = 3 \cdot (\sin x)'$

$y' = 3\cos x$

Primjer 5.

Deriviraj $y = -5\ \ln x$

Rješenje

$y' = -5 \cdot \frac{1}{x}$

$y' = \frac{-5}{x}$

Primjer 6.

Derriviraj $y = 3\ e^x$

Rješenje

$y' = 3\ (e^x)'$

$y' = 3\ e^x$

Primjer 7.

Deriviraj $y = 5 \cdot 7^x$

Rješenje

$y' = 5 \cdot 7^x \cdot \ln 7$

$y' = 5 \ln 7\ \cdot 7^x$

Primjer 8.

Deriviraj $y = \sqrt{x} - \frac{5}{x} + 6\sqrt[5]{x} + \frac{12}{x^3}$

Rješenje

Da bi mogli derivirati ovu funkciju, prvo moramo sve zapisati u obliku potencija s racionalnim eksponentima

$y = x^{\frac{1}{2}} - 5\ x^{-1} + 6\ x^{\frac{1}{5}} + 12\ x^{-3}$

Sad deriviramo primjenjujući formulu $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$

$$y' = \frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot (-1)\ x^{-2} + 6 \cdot \frac{1}{5}\ x^{-\frac{4}{5}} + 12 \cdot (-3)\ x^{-4}$$

Dobiveni rezultat zapisujemo u obliku korjena i razlomaka

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} + \frac{6}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{36}{x^4}$$

Primjer 9.

Deriviraj $y = \frac{7}{x^2} + 6\ \sqrt[3]{x} - \frac{8}{\sqrt[6]{x^5}} + 9\ \sqrt[5]{x^8}$

Rješenje

$y = 7\ x^{-2} + 6\ x^{\frac{1}{3}} - 8\ x^{-\frac{5}{6}} + 9\ x^{\frac{8}{5}}$

$$y' = 7 \cdot (-2)\, x^{-3} + 6 \cdot \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} - 8 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) x^{-\frac{11}{6}} + 9 \cdot \frac{8}{5}\, x^{\frac{3}{5}}$$

$$y' = \frac{-14}{x^3} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{20}{3\sqrt[6]{x^{11}}} + \frac{72\sqrt[5]{x^3}}{5}$$

Primjer 10.

Deriviraj $y = x\, e^x$

Rješenje

Primjenjujemo formulu za darivaciju umnoška $(u\, v)' = u'v + u\, v'$

$$y' = (x)'e^x + x\, (e^x)'$$

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

$$y' = e^x(1 + x)$$

Primjer 11.

Deriviraj $y = (5\, x^2 - 8)(4x + 3\, x^2)$

Rješenje

$$y' = (5\, x^2 - 8)'(4x + 3\, x^2) + (5\, x^2 - 8)(4x + 3\, x^2)'$$

$$y' = 10\, x\, (4x + 3\, x^2) + (5\, x^2 - 8)(4 + 6\, x\,)$$

$$y' = 40\, x^2 + 30\, x^3 + 20\, x^2 + 30\, x^3 - 32 - 48\, x$$

$$y' = 60\, x^3 + 60\, x^2 - 48\, x - 32$$

Primjer 12.

Deriviraj $y = x^5 \ln x$

Rješenje

$$y' = (x^5)'\, \ln x + x^5\, (\ln x)'$$

$$y' = 5\, x^4 \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 5\, x^4 \ln x + x^4$$

$$y' = x^4(1 + 5 \ln x)$$

Primjer 13.

Deriviraj $y = 7\, x^3 \sin x$

Rješenje

$y' = 7[(x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)']$

$y' = 7[3x^2 \sin x + 7x^3 \cos x]$

$y' = 7x^2 (3 \sin x + x \cos x)$

Primjer 14.

Deriviraj $y = (8x^3 - 6x^2 - 4x + 3)\, e^x$

Rješenje

$y' = (8x^3 - 6x^2 - 4x + 3)' e^x + (8x^3 - 6x^2 - 4x + 3)\, (e^x)'$

$y' = (24x^2 - 12x - 4)\, e^x + (8x^3 - 6x^2 - 4x + 3)\, e^x$

$y' = (24x^2 - 12x - 4 + 8x^3 - 6x^2 - 4x + 3)\, e^x$

$y' = (8x^3 + 18x^2 - 16x - 1)\, e^x$

Primjer 15.

Deriviraj $y = \frac{5x-2}{4x}$

Rješenje

Deriviramo po formuli za derivaciju količnika $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$y' = \frac{(5x-2)' \cdot 4x - (5x-2) \cdot (4x)'}{(4x)^2}$$

$$y' = \frac{5 \cdot 4x - (5x-2) \cdot 4}{16x^2}$$

$$y' = \frac{20x - 20x + 8}{16x^2}$$

$y' = \frac{8}{16x^2} = \frac{1}{2x^2}$

Primjer 16.

Deriviraj $y = \frac{2-7x}{6x-5}$

Rješenje

$$y' = \frac{(2-7x)'(6x-5) - (2-7x)(6x-5)'}{(2-7x)^2}$$

$$y' = \frac{-7(6x-5) - (2-7x)6}{(2-7x)^2}$$

$$y' = \frac{-42\,x + 35 - 12 + 42\,x}{(2 - 7\,x)^2}$$

$$y' = \frac{23}{(2 - 7\,x)^2}$$

Primjer 17.

Deriviraj $y = \frac{3\,x^2 - 5\,x + 4}{7x - 4\,x^2}$

Rješenje

$$y = \frac{(3\,x^2 - 5\,x + 4)'(7x - 4\,x^2) - (3\,x^2 - 5\,x + 4)\,(7x - 4\,x^2)'}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$y = \frac{(6\,x - 5)(7x - 4\,x^2) - (3\,x^2 - 5\,x + 4)\,(7 - 8\,x)}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$y' = \frac{42\,x^2 - 24\,x^3 - 35\,x + 20\,x^2 - (21\,x^2 - 24\,x^3 - 35\,x + 40\,x^2 + 28 - 32\,x)}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$y' = \frac{42\,x^2 - 24\,x^3 - 35\,x + 20\,x^2 - 21\,x^2 + 24\,x^3 + 35\,x - 40\,x^2 - 28 + 32\,x}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 + 32\,x - 28}{(7x - 4\,x^2)^2}$$

Primjer 18.

$$y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

Rješenja

$$y' = \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x - (2\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{2\,(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Primjer 19.

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 5\,x - 7}$$

Rješenje

$$y' = \frac{(e^x)'(x^2 + 5\,x - 7) - e^x\,(x^2 + 5\,x - 7)'}{(x^2 + 5\,x - 7)^2}$$

$$y' = \frac{e^x(x^2 + 5\,x - 7) - e^x(2\,x + 5)}{(x^2 + 5\,x - 7)^2}$$

$$y' = \frac{e^x(x^2 + 5\,x - 7 - 2\,x - 5)}{(x^2 + 5\,x - 7)^2}$$

$$y' = \frac{e^x(x^2 + 3\,x - 12)}{(x^2 + 5\,x - 7)^2}$$

Zadatak 1. Deriviraj sljedeće funkcije.

a) $f(x) = x^2 - 3x$

b) $f(x) = 6x^5 - 11x^4 + 3x^3 - 6x - 17$

c) $f(x) = 5x^{\frac{4}{3}} - 18x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{11}{4}} + 2x^{\frac{1}{5}}$

d) $f(x) = \sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + \frac{8}{x} - \frac{4}{x^4}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 12\sqrt[3]{x^4} + 7\sqrt{x^7} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^4}}$

f) $f(x) = 11e^x$

g) $f(x) = 6 \cdot 7^x$

h) $f(x) = 10 \ln x$

i) $f(x) = \log_4 x$

Zadatak 2. Deriviraj sljedeće funkcije.

a) $f(x)=(x^2-6x)(5x+3)$

b) $f(x)=(x^4+3x^3-6)(3x^3-7)$

c) $f(x)=(3x^4-5x^2-5x)(2x^2-6x+1)$

d) $f(x)=(4x-5)e^x$

e) $f(x)=(3x^2-6x+5)\ln x$

f) $f(x)=3e^x(2x^4-\frac{1}{x})$

g) $f(x)=6^x(6x-3)$

h) $f(x)=(6x+4)\sin x$

i) $f(x)=(3x^3-x-7)\tan x$

Zadatak 3. Deriviraj sljedeće funkcije.

a) $f(x)=\frac{3x+5}{5x-1}$

b) $f(x)=\frac{6x}{8-x}$

c) $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$

d) $f(x)=\frac{3x^2-4}{5x-7x^2}$

e) $f(x)=\frac{7x^2-6x-5}{-2x^2+5x-7}$

f) $f(x)=\frac{\cos x}{x+3}$

g) $f(x)=\frac{\tan x-1}{\cot x-1}$

h) $f(x)=\frac{e^x+3}{2-e^x}$

2. Deriviranje složene funkcije

Primjer 1.

$y' = (3x-8)^7$

Rješenje

Primjenjujemo formulu za derivaciju složene funkcije $u(v)' = u'(v) \cdot v'$

Primjetimo da je $v = 3x-8,\ u = v^7$ što znači da je $u' = 7v^6 \cdot v'$

Slijedi $y' = 7(3x-8)^6 \cdot (3x-8)'$

$y' = 7(3x-8)^6 \cdot 3 = 21(3x-8)^6$

Primjer 2.

$y = (6x^3 - 7x^2 - 8)^{11}$

Rješenje

Primjetimo da je $v = 6x^3 - 7x^2 - 8, u = v^{11}$

$y' = 11(6x^3 - 7x^2 - 8)^{10} \cdot (6x^3 - 7x^2 - 8)'$

$y' = 11(6x^3 - 7x^2 - 8)^{10} \cdot (18x^2 - 14x) = 11(18x^2 - 14x)(6x^3 - 7x^2 - 8)^{10}$

$y' = 22(9x^2 - 7x)$

Primjer 3.

Deriviraj $y = \sqrt{3x^2 - 5}$

Rješenje

Prvo korijen zapišemo u obliku potencije s racionalnim eksponentom a onda deriviramo.

$y = (3x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(3x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 5)'$

$y' = \frac{1}{2}(3x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot (3x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}} = 6x(3x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{6x}{\sqrt{3x^2-5}}$

Primjer 4.

Deriviraj $y = \sqrt[5]{7x^4 - 6x^3 + 2x - 7}$

Rješenje

$$y = (7x^4 - 6x^3 + 2x - 7)^{\frac{1}{5}}$$

$$y' = \frac{1}{5}(7x^4 - 6x^3 + 2x - 7)^{-\frac{4}{5}} \cdot (7x^4 - 6x^3 + 2x - 7)'$$

$$y' = \frac{1}{5}(7x^4 - 6x^3 + 2x - 7)^{-\frac{4}{5}} \cdot (28x^3 - 18x^2 + 2)$$

$$y' = \frac{28x^3 - 18x^2 + 2}{5\sqrt[5]{(7x^4 - 6x^3 + 2x - 7)^4}}$$

Primjer 5.

Deriviraj $y = \frac{12}{\sqrt[4]{(2x^3 - 5x + 3)^3}}$

Rješenje

$$y = 12(2x^3 - 5x + 3)^{-\frac{3}{4}}$$

$$y' = 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (2x^3 - 5x + 3)^{-\frac{7}{4}} \cdot (2x^3 - 5x + 3)'$$

$$y' = -9 \cdot (2x^3 - 5x + 3)^{-\frac{7}{4}} \cdot (6x^2 - 5)$$

$$y' = \frac{-9(6x^2 - 5)}{\sqrt[4]{(2x^3 - 5x + 3)^7}}$$

$$y' = \frac{-9(6x^2 - 5)}{(2x^3 - 5x + 3)\sqrt[4]{(2x^3 - 5x + 3)^3}}$$

Primjer 6.

Deriviraj $y = \ln(3x^2 + 8x - 4)$

Rješenje

Primjetimo da je $v = 3x^2 + 8x - 4$, $u = \ln v$ i slijedi $u' = \frac{1}{v} \cdot v'$

$$y' = \frac{1}{3x^2 + 8x - 4} \cdot (3x^2 + 8x - 4)'$$

$$y' = \frac{1}{3x^2 + 8x - 4} \cdot (6x + 8) = \frac{6x + 8}{3x^2 + 8x - 4}$$

Primjer 7.

Deriviraj $y = \ln\frac{3x-4}{2-5x}$

Rješenje

$$y' = \frac{1}{\frac{3x-4}{2-5x}} \cdot \left(\frac{3x-4}{2-5x}\right)'$$

$$y' = \frac{2-5x}{3x-4} \cdot \frac{3(2-5x)-(3x-4)(-5)}{(2-5x)^2}$$

$$y' = \frac{2-5x}{3x-4} \cdot \frac{6-15x-(-15x+20)}{(2-5x)^2}$$

$$y' = \frac{2-5x}{3x-4} \cdot \frac{6-15x+15x-20}{(2-5x)^2}$$

$$y' = \frac{2-5x}{3x-4} \cdot \frac{-14}{(2-5x)^2} = \frac{-14}{(3x-4)(2-5x)}$$

Primjer 8.

Deriviraj $y = \ln^2 x$

Rješenje

Funciju možemo zapisati i $y = (\ln x)^2$. Primjetimo da je $v = \ln x$ i $u = v^2$

$$y' = 2\ln x \cdot (\ln x)'$$

$$y' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

Primjer 9.

Deriviraj $y = \ln \sin x$

Rješenje

Primjetimo da je $v = \sin x$ i $u = \ln v$

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'$$

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\ x$$

Primjer 10.

Deriviraj $y = \sin x^2$

Primjetimo da je $v = x^2$ i $u = \sin v$.

$$y' = \cos x^2 \cdot (x^2)'$$

$$y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$$

Primjer 11.

Deriviraj $y = \sin^2 x$

Rješenje

Funkciju možemo zapisati i $y = (\sin x)^2$

Primjetimo da je $v = \sin x$ i $u = v^2$

$y' = 2\sin x \cdot (\sin x)'$

$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

Primjer 12.

Deriviraj $y = e^{4x-7}$

Rješenje

Primjetimo da je $v = 4x - 7$ i $u = e^v$

$y' = e^{4x-7} \cdot (4x - 7)'$

$y' = e^{4x-7} \cdot 4 = 4e^{4x-7}$

Primjer 13.

Deriviraj $y = e^{4x^3+2x+9}$

Rješenje

$y' = e^{4x^3+2x+9} \cdot (4x^3 + 2x + 9)'$

$y' = e^{4x^3+2x+9} \cdot (12x^2 + 2) = (12x^2 + 2)e^{4x^3+2x+9}$

$y' = 2(6x^2 + 1)e^{4x^3+2x+9}$

Primjer 14.

Odredi $y', y''\ i\ y'''$ za $y = 4x^4 - 7x^3 + 11x^2 - x + 15$

Rješenje

$y' = 16x^3 - 21x^2 + 22x - 1$

$y'' = 48x^2 - 42x + 22$

$y''' = 96x - 42$

Primjer 15.

Odredi $y', y''\ i\ y'''$ za $y = \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^4} - 2\sqrt[5]{x^{14}}$

Rješenje

$$y = 4x^{-1} - x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-4} - 2x^{\frac{14}{5}}$$

$$y' = -4x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 12x^{-5} - \frac{28}{5}x^{\frac{9}{5}}$$

$$y' = \frac{-4}{x^2} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{12}{x^5} - \frac{28}{5}\sqrt[5]{x^9}$$

$$y'' = 8x^{-3} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + 60x^{-6} - \frac{252}{25}x^{\frac{4}{5}}$$

$$y'' = \frac{8}{x^3} + \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} + \frac{60}{x^6} - \frac{252}{25}\sqrt[5]{x^4}$$

$$y''' = -24x^{-4} - \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} - 360x^{-7} - \frac{1008}{125}x^{-\frac{1}{5}}$$

$$y''' = \frac{-24}{x^4} - \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}} - \frac{360}{x^7} - \frac{1008}{125\sqrt[5]{x}}$$

Primjer 16.

Odredi $y', y''\ i\ y'''$ za $y = \frac{3x-7}{2x+9}$

Rješenje

$$y' = \frac{3 \cdot (2x+9) - (3x-7) \cdot 2}{(2x+9)^2}$$

$$y' = \frac{6x + 27 - 6x + 14}{(2x+9)^2}$$

$$y' = \frac{41}{(2x+9)^2} = 41(2x+9)^{-2}$$

y'' lakše se izračuna ukoliko y' deriviramo kao složenu funkciju

$$y'' = -82(2x+9)^{-3} \cdot (2x+9)'$$

$$y'' = -82(2x+9)^{-3} \cdot 2 = -164(2x+9)^{-3}$$

$$y'' = \frac{-164}{(2x+9)^3}$$

$$y''' = 492(2x+9)^{-4} \cdot (2x+9)'$$

$$y''' = 492(2x+9)^{-4} \cdot 2 = 984(2x+9)^{-4}$$

$$y''' = \frac{984}{(2x+9)^4}$$

Primjer 17.

Odredi $y'\ i\ y''$ za $y = \frac{2x^2-1}{x+3x^2}$

Rješenje

$$y' = \frac{4x(x+3x^2) - (2x^2-1)(1+6x)}{(x+3x^2)^2}$$

$$y' = \frac{4x^2 + 12x^3 - (2x^2 + 12x^3 - 1 - 6x)}{(x+3x^2)^2}$$

$$y' = \frac{4x^2 + 12x^3 - 2x^2 - 12x^3 + 1 + 6x}{(x+3x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 6x + 1}{(x+3x^2)^2}$$

y'' ćemo lakše iztračunati ako raspišemo nazivnik

$$y' = \frac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 6x^3 + 9x^4}$$

$$y'' = \frac{(4x+6)(x^2+6x^3+9x^4) - (2x^2+6x+1)(2x+18x^2+36x^3)}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3+24x^4+36x^5+6x^2+36x^3+54x^4-(4x^3+36x^4+72x^5+12x^2+108x^3+216x^4+2x+18x^2+36x^3)}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3+24x^4+36x^5+6x^2+36x^3+54x^4-4x^3-36x^4-72x^5-12x^2-108x^3-216x^4-2x-18x^2-36x^3}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

$$y'' = \frac{-72x^5 - 174x^4 - 108x^3 - 24x^2 - 2x}{(x^2+6x^3+9x^4)^2}$$

Primjer 18.

Odredi $y', y''i\ y'''$ za $y = e^{x^2}$

Rješenje

$$y' = e^{x^2} \cdot (x^2)'$$

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x = 2x\, e^{x^2}$$

y' deriviramo po formuli za derivaciju umnoška

$$y'' = (2x)' e^{x^2} + 2x\left(e^{x^2}\right)'$$

$$y'' = 2\, e^{x^2} + 2x\left(e^{x^2} \cdot 2x\right)$$

$$y'' = 2\, e^{x^2} + 2x \cdot 2x e^{x^2} = 2\, e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$$

$y'' = 2\, e^{x^2}(1+2x^2)$

$y''' = \left(2\, e^{x^2}\right)'(1+2x^2) + 2\, e^{x^2}(1+2x^2)'$

$y''' = \left(2e^{x^2} \cdot 2x\right)(1+2x^2) + 2e^{x^2}(4x)$

$y''' = 4xe^{x^2}(1+2x^2) + 8xe^{x^2} = 4xe^{x^2} + 8x^3e^{x^2} + 8xe^{x^2} = 8x^3e^{x^2} + 12xe^{x^2}$

$y''' = 4xe^{x^2}(2+3x^2)$

Primjer 19.

Odredi y' i y'' za $y = e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

Rješenje

$y' = e^{5x^3-7x^2+4x-2} \cdot (5x^3 - 7x^2 + 4x - 2)'$

$y' = e^{5x^3-7x^2+4x-2} \cdot (15x^2 - 14x + 4)$

$y' = (15x^2 - 14x + 4)e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

$y'' = (15x^2 - 14x + 4)'e^{5x^3-7x^2+4x-2} + (15x^2 - 14x + 4)\left(e^{5x^3-7x^2+4x-2}\right)'$

$y'' = (30x - 14)e^{5x^3-7x^2+4x-2} + (15x^2 - 14x + 4)\left[e^{5x^3-7x^2+4x-2} \cdot (15x^2 - 14x + 4)\right]$

$y'' = (30x - 14)e^{5x^3-7x^2+4x-2} + (15x^2 - 14x + 4)(15x^2 - 14x + 4)e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

$y'' = [(30x - 14) + (15x^2 - 14x + 4)(15x^2 - 14x + 4)]e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

$y'' = [30x - 14 + 225x^4 - 210x^3 + 60x^2 - 210x^3 + 196x^2 - 56x + 60x^2 - 56x + 16]e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

$y'' = (225x^4 - 420x^3 + 512x^2 - 82x + 2)\, e^{5x^3-7x^2+4x-2}$

Zadatak 1. Deriviraj sljedeće funkcije.

a) $f(x) = (x^2 + 8x)^6$

b) $f(x) = (x^3 - 3x - 9)^{11}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2 - 7)^5}$

d) $f(x) = \sqrt{3x + 4}$

e) $f(x) = \sqrt[5]{4x^2 - 3x + 8}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{(18x^6 - 2)^5}$

g) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt[6]{(4x^2-3x-1)^{13}}}$

h) $f(x)=(7x^2-5)^7(2x+5)^6$

i) $f(x)=(3x^2-4x+11)\sqrt[5]{4x+9}$

Zadatak 2. Deriviraj sljedeće funkcije.

a) $f(x)=e^{3x-7}$

b) $f(x)=e^{2x^2-5x-8}$

c) $f(x)=e^{\frac{3x-2}{7-2x}}$

d) $f(x)=4^{5x+1}$

e) $f(x)=\ln(x+5)$

f) $f(x)=\ln(x^2-6x+5)$

g) $f(x)=\ln\dfrac{2x+5}{3x-1}$

h) $f(x)=\ln\sqrt{4x^3-7x^2+5}$

i) $f(x)=\log_3\dfrac{3x^2-4x}{5x^2+3}$

Zadatak 3. Deriviraj sljedeće funkcije.

a) $f(x)=\sin x^5$

b) $f(x)=\sin^5 x$

c) $f(x)=\cos(2x-5)$

d) $f(x)=\cos(8x^3-7x-1)$

e) $f(x)=\ln\cos x$

f) $f(x)=\dfrac{\cos(2x-1)}{\sin x}$

3. Tangenta i normala

Primjer 1.

Odredi jednadžbu tangente na $y = 2x^2 - 5x - 3$ u točki $x_0 = 2$

Rješenje

Primjenjujemo formulu za jednadžbu tangente na $f(x)$ u x_0 : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Da bi mogli uvrstiti u formulu prvo je potrebno izračunati y_0, $f'(x)$ i $f'(x_0)$

$y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 3 = -5$

$f'(x) = 4x - 5$

$f'(x_0) = f'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$

Uvrstimo dobiveno u formulu

$y - (-5) = 3(x - 2)$

$y = 3x - 11$

Primjer 2.

Odredi jednadžbe tangente i normale na $y = \frac{5x-6}{4x+3}$ u točki $x_0 = 3$

Rješenje

Prvo moramo izračunati y_0, $f'(x)$ i $f'(x_0)$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{5 \cdot 3 - 6}{4 \cdot 3 + 3} = \frac{3}{5}$$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (4x + 3) - (5x - 6) \cdot 4}{(4x + 3)^2} = \frac{39}{(4x + 3)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{39}{(4 \cdot 3 + 3)^2} = \frac{13}{75}$$

Uvrstimo u formulu za trangentu

$$y - \frac{3}{5} = \frac{13}{75}(x - 3)$$

$$y - \frac{3}{5} = \frac{13}{75}x - \frac{13}{25}$$

$$y = \frac{13}{75}x + \frac{2}{25}$$

Uvrstimo u formulu za normalu

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y - \frac{3}{5} = \frac{-75}{13}(x - 3)$$

$$y = \frac{-75}{13}x + \frac{1264}{65}$$

Zadatak 1. Odredi tangentu i normalu funkcije u točki.

a) $f(x) = x^2 - 5x - 1,\ x_0 = 2$

b) $f(x) = (x^3 - 2x^2 - 2)^4,\ x_0 = 2$

c) $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+2},\ x_0 = -3$

d) $f(x) = \sqrt{6x-7},\ x_0 = \dfrac{3}{2}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{4x^2-3},\ x_0 = \dfrac{1}{2}$

f) $f(x) = \ln\dfrac{2+x}{4x-5},\ x_0 = 2$

g) $f(x) = e^{4x^2} - 7x + 3,\ x_0 = 4$

h) $f(x) = \dfrac{e^{5x+3} - x}{e^x},\ x_0 = 0$

i) $f(x) = \sin(2x - \dfrac{7\pi}{4}),\ x_0 = \dfrac{3\pi}{8}$

4. Pad i rast funkcije. Ekstremi

Kažemo da funkcija *f* **strogo raste** na intervalu $\langle a,b\rangle$

ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Kažemo da funkcija *f* **raste** na intervalu $\langle a,b\rangle$

ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Kažemo da funkcija *f* **strogo pada** na intervalu $\langle a,b\rangle$

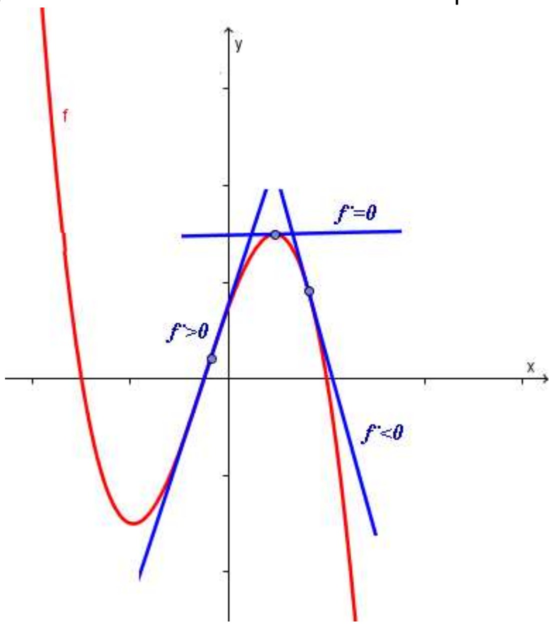
ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Kažemo da funkcija *f* **pada** na intervalu $\langle a,b\rangle$

ako za svaki $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Padajuće ili rastuće funkcije zovemo jednim imenom monotone funkcije, a intervale rasta/pada funkcije **intervalima monotonosti**.

Kako prva derivacija funkcije *f* u točki $T(x_0, f(x_0))$ daje informaciju o koeficijentu smijera tangente u toj točki pomoću derivacije možemo odrediti i intervala rasta ili pada funkcije.



Ako je $f'(x) > 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b\rangle$ tada funkcija raste na $\langle a,b\rangle$.

Ako je $f'(x) < 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b\rangle$ tada funkcija pada na $\langle a,b\rangle$.

Primjer 1. Odredimo intervale rasta/pada funkcije $f(x) = -2x^3 - x^2 + 3$.

Rješenje:

Domena ove funkcije je cijeli skup realnih brojeva (**R**).

Odredimo prvu defivaciju funkcije *f*: $f'(x) = -6x^2 - 2x$

Odredimo predznak prve derivacije funkcije. Predznak derivacije mijenja se u njenoj nultočki.

$$f'(x) = -6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}$$

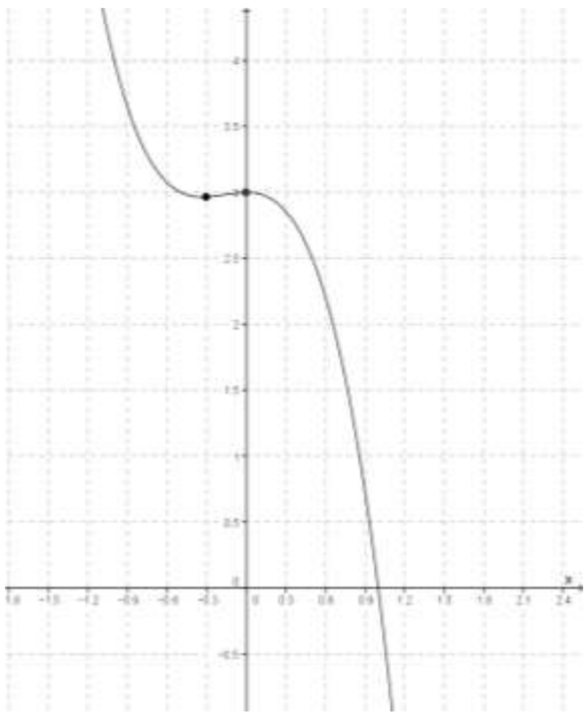
Nultočke derivacije unesemo u tablicu.

	-∞	$-\frac{1}{3}$	0	+∞
predznak $f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	↘	↗	↘	

Na intervalu $\langle -\frac{1}{3}, 0\rangle$ funkcija raste.

Na intervalima $\langle -\infty, -\frac{1}{3}\rangle$, $\langle 0, +\infty\rangle$ funkcija pada.

Pogledajmo graf te funkcije kako bi provjerili našu tvrdnju:



Kako je $f'(0) = f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ tangente u točkama $(0, y_1)$ i $\left(-\frac{1}{3}, y_2\right)$ paralelne su s x osi. Takve točke nazivamo **stacionarne točke**.

Stacionarna točka funkcije je svaka točka x_0 za koju vrijedi: $f'(x_0) = 0$.

Zadatak 1. Odredite intervale monotonosti sljedećih funkcija.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$

b) $f(x) = -x^3 - x + 2$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

d) $f(x) = x^4 + 4x - 5$

e) $f(x) = \frac{2}{x}$

f) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

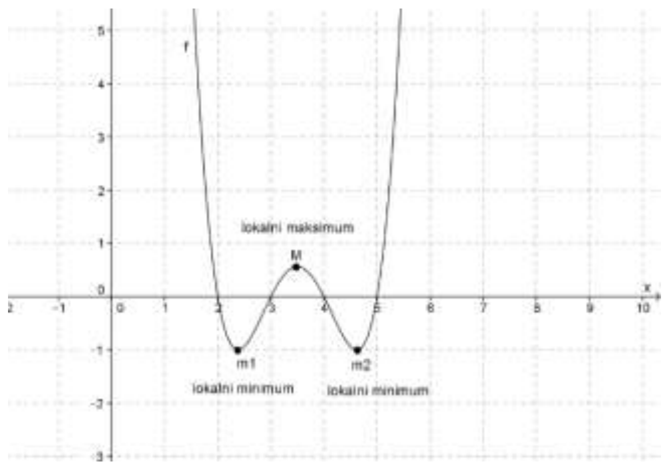
h) $f(x) = x + \ln x$

i) $f(x) = \ln\sqrt{x+2}$

Funkcija f ima **lokalni minimum** u točki x_0 ako postoji interval $\langle a,b\rangle$ ($x_0 \in \langle a, b\rangle$) takav da vrijedi $f(x_0) < f(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle, x \neq x_0$.

Funkcija f ima **lokalni maksimum** u točki x_0 ako postoji interval $\langle a,b\rangle$ ($x_0 \in \langle a, b\rangle$) takav da vrijedi $f(x_0) > f(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle, x \neq x_0$.

Ako funkcija ima lokalni maksimum ili lokalni minimum u točki x_0 kažemo da ima **lokalni ekstrem** u x_0.



Poučak:

Neka funkcija $f:\langle a,b\rangle \to R$ ima lokalni ekstrem u točki $x_0 \in \langle a,b\rangle$.

Ako postoji $f'(x_0)$ tada je $f'(x_0)=0$.

Kandidati za lokalni ekstrem: stacionarne točke i točke gdje ne postoji derivacija funkcije.

Ako funkcija *f* ima stacionarnu točku u x_0 i u x_0 prva derivacija funkcije mijenja svoj predznak tada u x_0 funkcija *f* ima lokalni ekstrem.

Postupak određivanja intervala monotonosti i lokalnih ekstrema funkcije *f*:

1. Odrediti domenu funkcije *f*.
2. Odrediti $f'(x)$.
3. Riješiti jednadžbu $f'(x)=0$ tj. odrediti stacionarne točke.
4. Napraviti tablicu s intervalima monotonosti i odrediti predznake $f'(x)$ (intervale određuje domena i stacionarne točke).
5. Odrediti točke lokalnog minimuma/maksimuma.

Primjer 2. Odredimo intervale monotonosti i ekstreme funkcije $f(x)=x\cdot\ln x$

Rješenje:

1. Domena funkcije:

   Zbog logaritamske funkcije $\ln x$ mora biti $x>0 \quad \Rightarrow \quad D_f=\mathbf{R}^+$
2. Odredimo prvu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x)=\left(x\cdot\ln x\right)' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

3. Stacionarne točke: riješimo jednadžbu $f'(x)=0$

$$f'(x)=\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0.3679$$

4. - 5. Tablica – određivanje predznaka prve derivacije, ekstrema:

	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
predznak $f'(x)$	-	+	
$f(x)$	↘	↗	

u 0 funkcija nije definirana

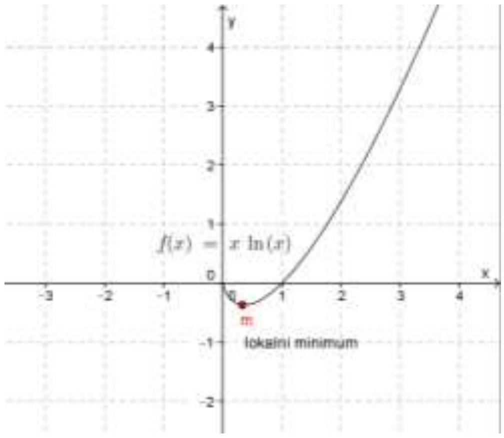
$m\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$

lokalni minimum

Na intervalu $\left\langle 0,\frac{1}{e}\right\rangle$ funkcija pada, a na $\left\langle \frac{1}{e},+\infty\right\rangle$ funkcija raste.

Funkcija dostiže svoj lokalni minimum u točki $x=\frac{1}{e}$. Minimalna vrijednost funkcije je $-\frac{1}{e}$.

Provjerimo ono što smo dobili računom na grafu funkcije:



Napomena:
Karakter ekstrema funkcije (minimum/maksimum) možemo odrediti i na osnovu **druge derivacije** funkcije *f*:

1. Odredimo derivacije funkcije $f'(x), f''(x)$.
2. Riješimo jednadžbu $f'(x)=0$ tj. odredimo stacionarne točke
3. Ako je $f''(x_0)>0$ onda je u x_0 **minimum** funkcije.
   Ako je $f''(x_0)<0$ onda je u x_0 **maksimum** funkcije.
   Ako je $f''(x_0)=0$ onda karakter ekstrema određujemo pomoću prve derivacije.

Zadatak 2. Odredite intervale monotonosti i ekstreme sljedećih funkcija.

a) $f(x)=x^2-3x-7$

b) $f(x)=x^3-3x+1$

c) $f(x)=x^3-2x^2+x-1$

d) $f(x)=2x^4+8x-3$

e) $f(x)=x^5-5x^4+1$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$

g) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$

h) $f(x)=\dfrac{2x}{9+x^2}$

i) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$

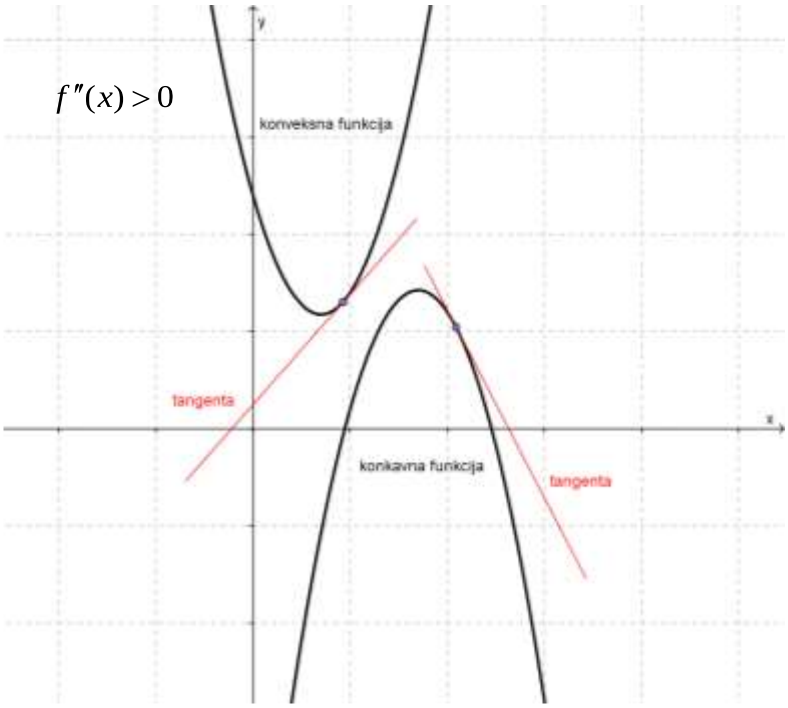
j) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

k) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

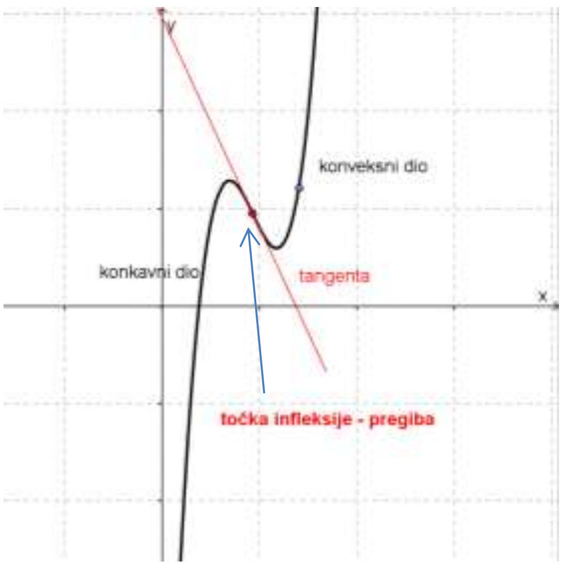
l) $f(x)=\ln\sqrt{x+3}$

m) $f(x)=\sin x+\cos x+x$

5. Konveksnost i konkavnost funkcije



$f''(x) < 0$



Za funkciju kažemo da je **konveksna** na nekom intervalu $\langle a, b \rangle$ ako je graf funkcije iznad tangente na graf funkcije u bilo kojoj točki iz tog intervala.
Za funkciju kažemo da je **konkavna** na nekom intervalu $\langle a, b \rangle$ ako je graf funkcije ispod tangente na graf funkcije u bilo kojoj točki iz tog intervala.

Kako je nagib tangente vezan uz prvu derivaciju funkcije f u točki x_0, konveksnost i konkavnost funkcije možemo odrediti na osnovu njene druge derivacije.

Ako je $f''(x) > 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b \rangle$ tada je funkcija konveksna na $\langle a,b \rangle$.
Ako je $f''(x) < 0$ u svakoj točki intervala $\langle a,b \rangle$ tada je funkcija konkavna na $\langle a,b \rangle$.

Točku x_0 u kojoj konveksnost prelazi u konkavnost i obrnuto zovemo **točkom pregiba ili infleksije**. Za nju vrijedi da je $f''(x_0) = 0$.

Postupak određivanja intervala konveksnosti i konkavnosti funkcije *f*:

1. Odrediti domenu funkcije *f*.
2. Odrediti $f''(x)$.
3. Riješiti jednadžbu $f''(x) = 0$ tj. odrediti točke pregiba ili infleksije.
4. Napraviti tablicu s intervalima konveksnosti/konkavnosti i odrediti predznake $f''(x)$ (intervale određuje domena i točke pregiba).

Primjer 1. Odredimo intervale konkavnosti/konveksnosti funkcije $f(x) = x^2 + 4x - 1$.

Rješenje:

1. Domena funkcije je cijeli skup realnih brojeva. ($D_f = \mathbf{R}$)
2. Odredimo drugu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x) = \left(x^2 + 4x - 1\right)' = 2x + 4$$
$$f''(x) = (2x + 4)' = 2$$

3. $f''(x) > 0$ za svaki x iz domene funkcije $\Rightarrow$ funkcija je konveksna na cijelom području definicije.

Primjer 2. Odredimo intervale konkavnosti/konveksnosti funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

i. Domena funkcije:
Zbog nazivnika mora biti $x - 1 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

ii. Odredimo drugu derivaciju funkcije *f*:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' = \frac{1\cdot(x-1) - x\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

iii. $f''(x) \neq 0$ za svaki x iz domene funkcije, ali mijenja predznak zbog prekida u domeni funkcije. Nema točke infleksije.

iv. Napravimo tablicu:

	$-\infty$	1	$+\infty$
predznak $f''(x)$	-	+	
$f(x)$	konkavna $\cap$	konveksna $\cup$	

u 1 funkcija nije definirana

Na intervalu $\langle -\infty, 1\rangle$ funkcija je konkavna, a na $\langle 1, +\infty\rangle$ konveksna.

Zadatak 1. Odredite intervale konkavnosti/konveksnosti sljedećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 - 5x$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 12$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

d) $f(x) = 2x^4 + x - 3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

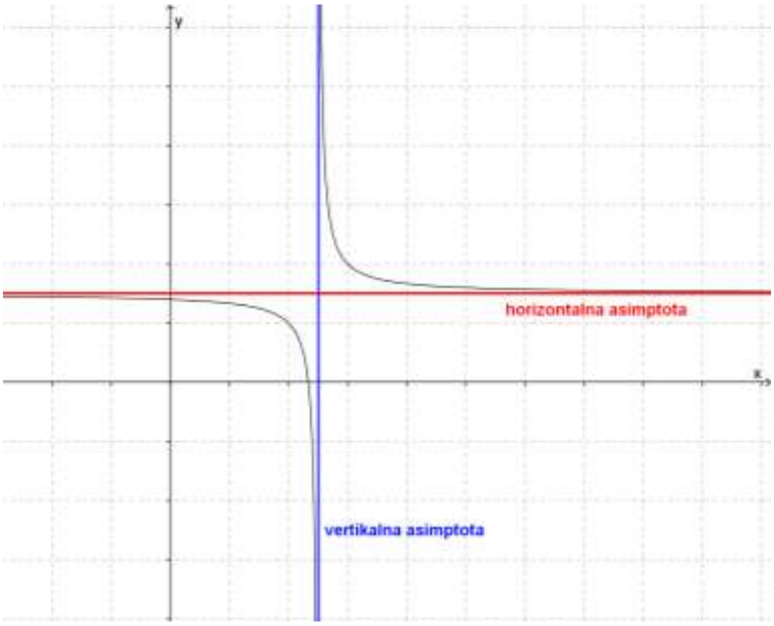
f) $f(x) = \dfrac{x}{9 + x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2}$

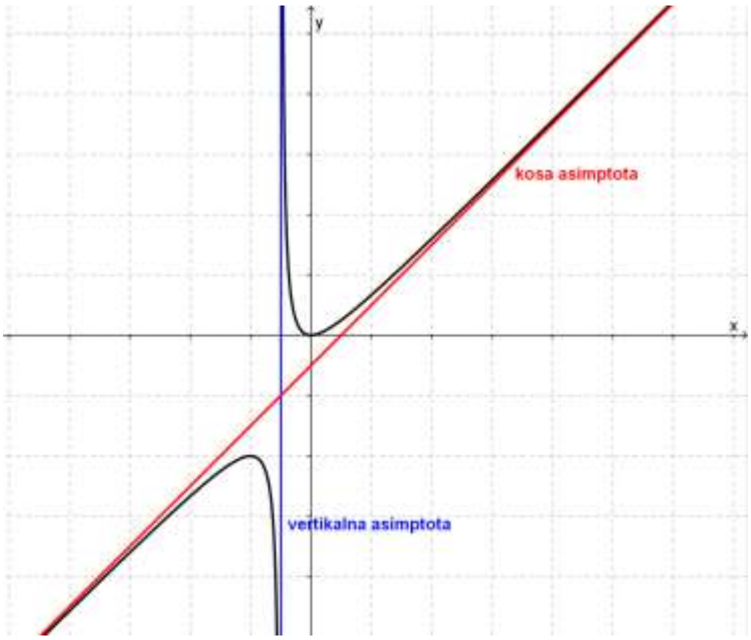
h) $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$

6. Asimptote funkcija

$f(x)$



$f(x)$



Jednostavnim riječnikom možemo reći da je asimptota pravac kojem se graf funkcije približava a nikad ga ne dodiruje.

Razlikujemo vertikalne, horizontalne i kose asimptote.

1. **Vertikalne asimptote**

   Ako za funkciju f vrijedi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ onda je pravac $x = c$ njezina **vertikalna asimptota**.

2. **Horizontalne asimptote**

Ako za funkciju f vrijedi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ onda je pravac $y=l$ njezina (desna/lijeva) **horizontalna asimptota**.

3. Kose asimptote

Ako za funkciju f postoji

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ i } \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=l$$

onda je pravac $y=kx+l$ njezina **kosa asimptota**.

Primjer 1. Odredimo asimptote funkcije $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$.

Rješenje:

Odredimo prvo domenu funkcije:

Zbog nazivnika mora biti $x-1\neq 0 \Rightarrow D_f=\mathbf{R}\setminus\{1\}$

Vertikalna asimptota: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2}{x-1}=\pm\infty \Rightarrow x=1$ je vertikalna asimptota funkcije.

Horizontalna asimptota: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{x-1}=\infty \Rightarrow$ funkcija nema horizontalne asimptote.

Kose asimptote:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

$$l=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x-1}-2\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

$\Rightarrow y=2x+2$ je kosa asimptota.

Zadatak 1. Odredite asimptote (ako postoje) sljedećih funkcija.

a) $f(x)=x^2-5x$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2}$

e) $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

7.Ispitivanje tijeka funkcije. Graf funkcije

Postupak ispitivanja tijeka i crtanja grafa funkcije:

1. Odrediti domenu funkcije *f*.
2. Odrediti nultočke funkcije (sjecišta grafa funkcije s osi apscisa) i sjecište funkcije s osi ordinata.
3. Uočiti svojstva funkcije (parnost/neparnost, periodičnost).
4. Odrediti asimptote funkcije (vertikalne, horizontalne/kose).
5. Odrediti intervale monotonosti i ekstreme funkcije.
    a. Odrediti $f'(x)$.
    b. Riješiti jednadžbu $f'(x) = 0$ tj. odrediti stacionarne točke.
    c. Napraviti tablicu s intervalima monotonosti i odrediti predznake $f'(x)$ (intervale određuje domena i stacionarne točke).
    d. Odrediti točke lokalnog minimuma/maksimuma.
6. Odrediti intervale konveksnosti/konkavnosti frunkcije.
    a. Odrediti $f''(x)$.
    b. Riješiti jednadžbu $f''(x) = 0$ tj. odrediti točke pregiba ili infleksije.
    c. Napraviti tablicu s intervalima konveksnosti/konkavnosti i odrediti predznake $f''(x)$ (intervale određuje domena i točke pregiba).
7. Nacrtati graf funkcije.

Primjer 1. Ispitajmo tijek i nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$.

Rješenje:

1. Domena funkcije:
   Zbog nazivnika mora biti $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pm 2\}$

2. Nultočke funkcije:

   Rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$. Jednadžba $\dfrac{2}{x^2 - 4} = 0$ nema rješenja, pa nultočke ne postoje.
   Sjecište s osi ordinata: Određujemo $f(0)$.
   $f(0) = \dfrac{2}{0^2 - 4} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ graf funkcije siječe os ordinata u $-\dfrac{1}{2}$.

3. $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ funkcija je parna (graf joj je simetričan s obzirom na os ordinata)

4. Asimptote funkcije:

Vertikalna asimptota: $\lim_{x\to\pm2} f(x) = \lim_{x\to\pm2} \frac{2}{x^2-4} = \pm\infty \Rightarrow$ pravci $x=-2, x=2$ su veretikalne asimptote funkcije.

Horizontalna asimptota: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^2-4} = 0 \Rightarrow$ pravac $y=0$ je horizontalna asimptota.

Ako funkcija ima horizontalne asimptote nema kose.

5. Intervali monotonosti i ekstremi:

- Odredimo prvu defivaciju funkcije *f*: $f'(x) = \left(\frac{2}{x^2-4}\right)' = \frac{-4x}{(x^2-4)^2}$
- Odredimo stacionarne točke.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

- Nacrtamo tablicu i odredimo predznak prve derivacije.

$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad +\infty$

predznak $f'(x)$	+	+	-	-
$f(x)$	↗	↗	↘	↘

funkcija u -2 nije definirana

lokalni maksimum $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

funkcija u 2 nije definirana

Na intervalima $\langle -\infty, -2\rangle, \langle -2, 0\rangle$ funkcija raste.

Na intervalima $\langle 0,2\rangle, \langle 2, +\infty\rangle$ funkcija pada.

6. Intervali konveksnosti/konkavnosti:

- Odredimo drugu defivaciju funkcije *f*: $f''(x) = \left(\frac{-4x}{\left(x^2-4\right)^2}\right)' = \frac{12x^2+16}{\left(x^2-4\right)^3}$

- Odredimo točke infleksije.

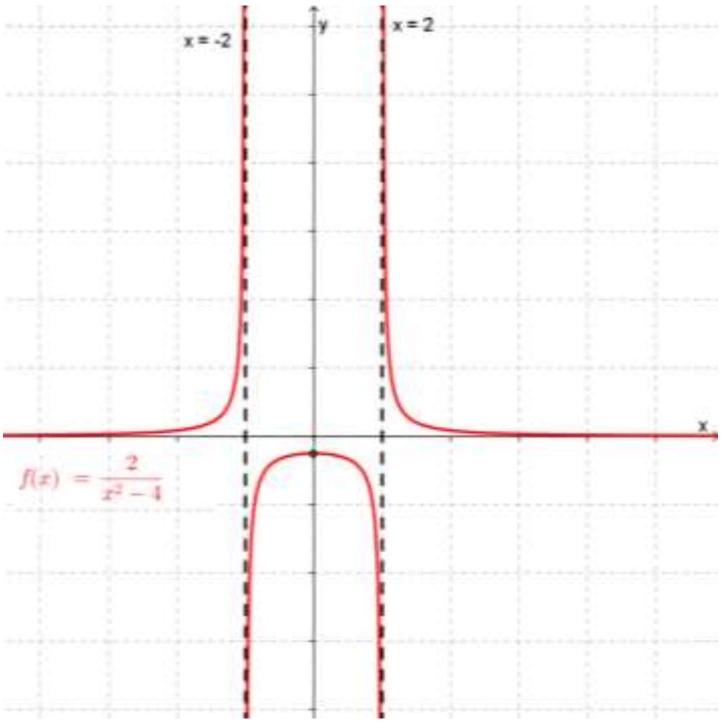
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12x^2+16}{\left(x^2-4\right)^3} = 0$ nema realnih nultočaka $\Rightarrow$ nema točaka infleksije.

- Nacrtamo tablicu s točkama prekida domene i odredimo predznak druge derivacije.

$-\infty \qquad -2 \qquad 2 \qquad +\infty$

predznak $f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	konkavna	konveksna	konkavna

7. Crtamo graf funkcije.



Zadatak 1. Ispitajte tijek i nacrtajte graf sljedećih funkcija.

a) $f(x) = x^2 - 3x$

b) $f(x) = -\frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{4 + x^2}$

d) $f(x) = \frac{3 - x}{x^2}$

e) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

8. Literatura

1. Javor, Petar (1993). Uvod u matematičku analizu: za tehničke fakultete. Zagreb, Školska knjiga.

2. Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize / Demidović et al. (2003). Zagreb, Golden marketing –Tehnička knjiga, Zagreb.

3. Jukić, D, ; Scitovski, R. (1998). Matematika I. Osijek, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku.

4. Krnić, L.; Šikić, Z. (1992). Račun diferencijalni i integralni: I dio. Zagreb, Školska knjiga.